

**Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія**

**Ю.О.Єрфорт
С.В.Подлесний**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
СТАТИКА І КІНЕМАТИКА**

**Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів механічних спеціальностей
заочної форми навчання**

Краматорськ 2008

УДК 531.
ББК 22.21
Т-33

Рецензенти:

Малєєв В.Б., д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Донецького національного технічного університету;

Сердюк Л.І., д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Полтавського національного технічного університету;

Морачковський О.К., д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 1.4/18-Г-283 від 30.01.08.2008

Єрфорт, Ю. О.

Т-33 Теоретична механіка. Статика і кінематика: навчальний посібник з методичними вказівками і контрольними завданнями для студентів заочної форми навчання / Ю. О. Єрфорт, С. В. Подлесний – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 164 с.

ISBN 978-966-379-241-5

Навчальний посібник містить контрольні завдання до першого та другого розділів теоретичної механіки: «Статика та кінематика» для студентів машинобудівних спеціальностей, а саме: стислі відомості з теорії, умови, варіанти та схеми, а також приклади виконання кожного завдання.

УДК 531.
ББК 22.21

ISBN 978-966-379-241-5

© Ю.О.Єрфорт, С.В.Подлесний, 2008

© ДДМА, 2008

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 Загальні методичні вказівки.....	6
2 Програма розділів курсу теоретичної механіки.....	7
2.1 Статика.....	7
2.2 Кінематика.....	9
3 Контрольні завдання. Зміст завдань, вибір варіантів індивідуальних завдань, порядок виконання і вимоги до їх оформлення.....	11
4 Задачі до контрольних завдань.....	13
4.1 СТАТИКА.....	13
4.1.1 ЗАДАЧА С1. Визначення реакцій опор плоскої рами.....	13
4.1.1.1 Стислі відомості з теорії до задачі.....	13
4.1.1.2 Умова задачі.....	24
4.1.1.3 Приклад рішення задачі С1.....	27
4.1.1.4 Приклад 2 рішення задачі С1.....	29
4.1.2 ЗАДАЧА С2. Визначення реакцій опор складеної конструкції.....	31
4.1.2.1 Стислі відомості з теорії до задачі.....	31
4.1.2.2 Умова задачі.....	32
4.1.2.3 Приклад 1 рішення задачі С2.....	39
4.1.2.4 Приклад 2 рішення задачі С2.....	43
4.1.3 ЗАДАЧА С3. Визначення реакцій опор твердого тіла.....	46
4.1.3.1 Стислі відомості з теорії до задачі.....	46
4.1.3.2 Умова задачі.....	49
4.1.3.3 Приклади рішення задачі С3.....	55
4.1.4 ЗАДАЧА С4. Визначення реакцій опор твердого тіла.....	59
4.1.4.1 Умова задачі.....	59
4.1.4.2 Приклади рішення задачі С4.....	62
4.2 КІНЕМАТИКА.....	67
4.2.1 ЗАДАЧА К1. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху.....	67
4.2.1.1 Стислі відомості з теорії кінематики точки.....	67

4.2.1.2	Умова задачі.....	83
4.2.1.3	Приклади рішення задачі К1.....	85
4.2.2	ЗАДАЧА К2. Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі.....	93
4.2.2.1	Стислі відомості з теорії кінематики простих рухів тіла.....	93
4.2.2.2	Умова задачі.....	105
4.2.2.3	Приклади рішення задачі К2.....	108
4.2.3	ЗАДАЧА К3. Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при його плоско-паралельному русі.....	114
4.2.3.1	Стислі відомості з теорії кінематики плоско-паралельного руху твердого тіла.....	114
4.2.3.2	Умова задачі.....	124
4.2.3.3	Приклади рішення задачі К3.....	127
4.2.4	ЗАДАЧА К4. Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки при складному русі.....	140
4.2.4.1	Стислі відомості з теорії кінематики складного руху точки.....	140
4.2.4.2	Умова задачі.....	147
4.2.4.3	Приклади рішення задачі К4.....	151
5	ЗАЛІКОВІ ПИТАННЯ.....	160
	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	163

ВСТУП

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу, найважливішою основою сучасної техніки. Вивчення теоретичної механіки повинне дати той мінімум фундаментальних знань, на базі яких майбутній фахівець зуміє самостійно опанувати все нове, з чим йому доведеться зіштовхуватися під час подальшого розвитку науки техніки і технологій.

Знання теоретичної механіки необхідно при вивченні більшості інженерних дисциплін: опір матеріалів, теорія механізмів і машин, деталі машин, гідравліка, спеціальні дисципліни з устаткування і багато інших. Нарешті, вивчення курсу теоретичної механіки сприяє розширенню наукового кругозору і підвищенню загальної культури майбутнього фахівця, розвитку його логічного й інженерного мислення.

Дані методичні вказівки покликані допомогти студентам узагальнити і систематизувати свої знання за курсом теоретичної механіки й ефективно підготуватися до успішного складання іспитів.

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Для вивчення курсу теоретичної механіки необхідно мати відповідну математичну підготовку. В усіх розділах курсу широко використовується векторна алгебра. Необхідно вміти обчислювати проекції векторів на координатні осі, знаходити геометрично й аналітично суму векторів, обчислювати скалярний і векторний добуток двох векторів і знати властивості цих добутоків, а в кінематиці та динаміці – диференціювати вектори.

Треба також вміти користатися системою прямокутних декартових координат на площині й у просторі.

Для вивчення кінематики треба вміти зовсім вільно диференціювати функції однієї змінної.

Матеріал курсу рекомендується вивчати за підручником [1 або 2], при цьому, насамперед, потрібно усвідомити сутність викладеного питання, простого "завчання" матеріалу великої користі не принесе.

Особливу увагу варто звернути на формулювання відповідних визначень, теорем і т.п.: у точних формулюваннях суттєво кожне слово.

Заочна форма навчання передбачає самостійне вивчення більшої частини матеріалу.

Тому при вивченні курсу корисно скласти короткий конспект. Рекомендується окремо виписати визначення, формули і вивчити їх.

Матеріал теоретичного питання або теми можна вважати вивченим, якщо ви можете його відтворити на папері, не заглядаючи в підручник або конспект лекцій. До місць, що викликають ускладнення, поверніться ще раз.

2 ПРОГРАМА КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Предмет теоретичної механіки. Питання, які вивчає теоретична механіка. Об'єктивний характер законів механіки. Критерій практики. Короткий історичний огляд розвитку теоретичної механіки.

Роботи Архімеда, М. Коперника, Г. Галілея, І. Ньютона, Л. Ейлера, Жана д'Аламбера, Ж. Лагранжа, Гюстава Коріоліса, М. В. Ломоносова, Л.В. Ассура, М. В. Остроградського, П. Л. Чебишова, С. В. Ковалевської, С. О. Чаплигіна, М. Є. Жуковського, О. М. Крилова та ін.

Основні поняття теоретичної механіки: матеріальна точка, система матеріальних точок і абсолютно тверде тіло.

Три основні частини теоретичної механіки: статика, кінематика і динаміка.

2.1 Статика

Тема 1.1. Аксиоми та найпростіші теореми статки

Аксиома про паралелограм сил. Графічне визначення рівнодійної системи сил (правило многокутника сил). Визначення зрівноваженої системи сил. Поняття про еквівалентні системи сил.

Механічна і графічна умови рівноваги системи сил, які діють на матеріальну точку. Аксиома про абсолютно тверде тіло. Теорема про перенесення вектора сили, яка діє на абсолютно тверде тіло, вздовж її лінії дії. Теорема про три сили.

Вільні та невольні системи матеріальних точок. Поняття про в'язі. Різні види в'язей. Група аксіом про в'язі: аксиоми про звільнення від в'язей, про накладання нових в'язей, про твердіння. Два способи класифікації сил в теоретичній механіці: 1) зовнішні та внутрішні сили; 2) активні сили і реакції в'язей. Метод перерізів, за яким визначають внутрішні сили.

Поняття про силу тертя ковзання. Закон Кулона. Дослідне вимірювання сили тертя трибометром. Кут тертя. Конус тертя. Поняття: закони тертя кочення.

Тема 1.2. Система збіжних сил

Графічне значення рівнодійної системи збіжних сил. Графічна умова рівноваги системи збіжних сил. Аналітичне визначення рівнодійної системи збіжних сил. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.

Теорема про момент рівнодійної (теорема Варіньона).

Тема 1.3. Основні властивості систем сил, які діють на тверде тіло

Три види векторів у механіці: визначені, ковзні, вільні. Приклади застосування цих векторів у механіці.

Аналітичне визначення ковзних векторів. Момент сили відносно точки. Обчислення моменту сили відносно точки. Плече сили. Момент сили відносно осі. Правило визначення моменту сили відносно осі.

Система двох паралельних сил. Пара сил. Момент пари сил — вільний вектор. Властивості пар сил. Теореми про пари сил.

Перетворення систем сил, які діють на абсолютно тверде тіло (зведення системи сил до головного вектора й головного моменту).

Механічні, геометричні та аналітичні умови рівноваги вільного твердого тіла. Умови рівноваги системи сил, розміщених в одній площині.

Умови рівноваги невідного твердого тіла. Умови рівноваги тіла, яке має одну нерухому точку. Умови рівноваги тіла, яке має дві нерухомі точки.

Тема 1.4. Центр паралельних сил, центр ваги

Центр паралельних сил, Визначення центра паралельних сил векторним і координатним способами.

Центр ваги дискретної системи матеріальних точок. Центр ваги неоднорідного тіла. Центр ваги однорідного тіла. Центр ваги лінії та плоскої фігури. Графічний метод визначення центра ваги плоских фігур. Визначення центра ваги тіл складної форми.

2.2 Кінематика

Предмет кінематики. Питання, які вивчає кінематика. Основна задача кінематики. Механічний рух як найпростіша форма руху матерії. Система відліку. Простір і час як форми існування матерії. Тривимірний Евклідовий простір та універсальний час. Вимірювання часу в кінематиці. Одиниці вимірювання часу.

Тема 2.1. Кінематика точки

Переміщення і рух матеріальної точки. Траєкторія точки. Основна задача кінематики точки — визначення закону руху точки.

Три способи задання руху точки: векторний, координатний, природний. Графік руху; графік шляху. Обчислення шляху, пройденого точкою. Рівномірний і прямолінійний руху точки. Швидкості рівномірного і прямолінійного руху точки. Швидкості нерівномірного прямолінійного і криволінійного рухів точки.

Швидкість як похідна від радіуса-вектора точки за часом.

Швидкість при природному способі задання руху точки.

Швидкість точки в прямокутних декартових координатах.

Прискорення точки. Середнє прискорення точки. Прискорення точки у даний момент часу.

Прискорення при векторному способі задання руху точки. Прискорення точки у прямокутних декартових координатах.

Координатні площини природного тригранника (трієдра): стична, нормальна, спрямна. Природні осі координат: дотична, головна нормаль, бінормаль. Проекції прискорення на природні осі координат.

Дотичне і нормальне прискорення точки. Визначення вектора прискорення точки при природному способі задання руху точки. Визначення радіуса кривизни траєкторії в даній точці.

Окремі випадки руху точки: прямолінійний, рівномірний, рівномірно-змінний. Швидкість і закон руху точки при рівномірно-змінному русі.

Тема 2.2. Найпростіші рухи твердого тіла: поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої осі

Визначення поступального руху тіла і приклад цього руху. Теореми про траєкторії, швидкості та прискорення точок тіла при поступальному русі.

Визначення обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі і приклади цього руху, які зустрічаються в техніці.

Рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість і кутове прискорення. Траєкторії точок тіла, закон руху точки тіла за траєкторією.

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла як вектори.

Формула Ейлера, яка визначає лінійну швидкість точки тіла при обертанні навколо нерухомої осі. Визначення лінійного прискорення точки тіла. Рівномірне і рівно змінне обертання тіла навколо нерухомої осі.

Тема 2.3. Складний рух точки

Абсолютний, відносний і переносний рухи точки. Теорема про додавання швидкостей (правило паралелограма швидкостей).

Абсолютне прискорення точки, теорема Коріоліса. Фізичний зміст прискорення Коріоліса (поворотного прискорення). Визначення прискорення Коріоліса як векторного добутку двох векторів.

Визначення прискорення Коріоліса за правилом Н.Є.Жуковського. Випадки, коли прискорення Коріоліса дорівнює нулю.

Тема 2.4. Рух тіла навколо нерухомої точки

Кути Ейлера. Теорема Ейлера про довільне переміщення тіла навколо нерухомої точки. Рівняння руху тіла, яке має одну нерухому точку. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються.

Правило паралелограма кутових швидкостей. Миттєва вісь обертання, миттєва кутова швидкість, миттєве кутове прискорення. Аксоїди. Теорема Пуансона. Розподіл лінійних швидкостей у тілі з нерухомою точкою (формула Ейлера). Розподіл прискорень у тілі з нерухомою точкою.

Тема 2.5. Плоско-паралельний рух твердого тіла

Плоско-паралельний рух твердого тіла і рух плоскої фігури в її площині. Теорема про переміщення плоскої фігури. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса. Незалежність кутової швидкості і кутового прискорення від вибору полюса.

Теорема про розподіл швидкостей при плоско-паралельному русі тіла. Теорема про проєкції швидкостей кінців незмінного відрізка.

Миттьовий центр швидкостей і способи його знаходження.

Плоско-паралельний рух як миттьовий обертальний рух навколо миттьового центра обертання. Визначення кутової швидкості і кутового прискорення при плоскому русі.

Теорема про розподіл прискорень точок при плоско-паралельному русі тіла.

З КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ. ЗМІСТ ЗАВДАНЬ, ВИБІР ВАРІАНТІВ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ, ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ І ВИМОГИ ДО ЇХ ОФОРМЛЕННЯ

За кожним із розділів (статика і кінематика) студенти виконують індивідуальні контрольні завдання. До складу завдань входять задачі і тести. Перелік задач і тестів, які входять до складу кожного контрольного завдання вказується викладачем на наставній сесії.

До кожної задачі дається 10 рисунків і таблиця (з тим же номером, що і задача), яка містить додаткові до тексту задачі умови.

Нумерація рисунків подвійна, при цьому номером рисунка є цифра, що стоїть після точки.

Наприклад, рис. С1.4 – це рис. 4. до задачі С1 і т.д. (у тексті задачі при повторних посиланнях на рисунок пишеться просто рис. 4 і т.д.). Номера умов від 0 до 9 проставлені в першому стовпці (чи в першому рядку) таблиці.

Студент у всіх задачах вибирає номер рисунка за передостанньою цифрою шифру, а номер умови у таблиці – за останньою; наприклад, якщо шифр закінчується числом 46, то беруться рис. 4 і умови № 6 з таблиці.

Кожне завдання виконується в окремому зошиті (учнівському), сторінки якого нумеруються. На обкладинці вказуються: назва дисципліни, номер роботи, прізвище та ініціали студента, навчальний шифр, група і домашня адреса.

Розв'язок кожної задачі обов'язково починати на розвороті зошита (на парній сторінці, починаючи з другої, інакше роботу важко перевіряти). Зверху вказується номер задачі, далі робиться креслення (можна олівцем) і записується, що в задачі задано і що потрібно визначити (текст задачі не переписується).

Креслення виконується з урахуванням умов розв'язуваного варіанта задачі; на ньому всі кути, сили, тіла і їхнє розташування на кресленні повинні відповідати цим умовам. У результаті в цілому ряді задач креслення виходить більш простим, ніж на загальному рисунку.

Креслення має бути акуратним і наочним, а його розміри дозволяти ясно показати всі вектори сил, швидкостей та прискорень та інші позначення. На кресленні необхідно показувати координатні осі, а в розрахунках вказувати одиниці одержуваних величин.

Розв'язок задач необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули чи теореми застосовуються, відкіля виходять ті чи інші результати і т.п.) і докладно викладати весь хід розрахунків. На кожній сторінці варто залишати поля для зауважень рецензента.

На іспиті необхідно подати зараховані за даним розділом роботи, у яких усі відзначені рецензентом помилки мають бути виправлені.

При читанні тексту кожної задачі потрібно врахувати наступне. Більшість рисунків дані без дотримання масштабів. На рисунках до задач С1 - С3 і К1 - К4 усі лінії, рівнобіжні рядкам, вважаються горизонтальними, а перпендикулярні рядкам – вертикальними, і це в тексті задач спеціально не обговорюється.

Також без застережень вважається, що всі нитки (гнучкі в'язі, мотузки, троси) є нерозтяжні та невагомі, нитки, перекинуті через блок, по блоку не ковзають, катки і колеса котяться по площинах без ковзання. Усі в'язі, якщо не зроблено інших застережень, вважаються ідеальними.

Варто також мати на увазі, що деякі величини задані в умовах задачі, при розв'язку окремих варіантів можуть не знадобитися, вони потрібні для розв'язку інших варіантів задачі.

З усіх пояснень у тексті задачі студенту варто звертати увагу тільки на ті, які стосуються його варіанта.

Попереду контрольних завдань з кожної теми в методичних вказівках даються короткі відомості з теорії і контрольні питання, які необхідно опрацювати і знати для розв'язку задач і їх успішного захисту.

Методичні вказівки з розв'язання задач, що входять до контрольних завдань, даються для кожної задачі після її тексту під рубрикою "Указівки", потім дається приклад розв'язку аналогічної задачі.

Мета прикладу – роз'яснити хід рішення, але не відтворити його цілком. Тому у деяких випадках проміжні розрахунки опускаються. Але при виконанні завдання всі перетворення і числові розрахунки мають бути обов'язково послідовно пророблені з необхідними поясненнями; наприкінці мають бути дані відповіді з указівкою (розмірностей) величин.

4 ЗАДАЧІ ДО КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

4.1 Статика

4.1.1 ЗАДАЧА С1. *Визначення реакцій опор плоскої рами*

4.1.1.1 Стислі відомості з теорії до задачі

Аксіоми та найпростіші теореми статки

Аксіоми механіки та закони Ньютона лежать в основі теоретичної механіки. Велике значення, зокрема, має аксіома про звільнення від в'язей, за якою рух невільних матеріальних систем можна звести до руху вільних систем.

У класичній механіці розглядаються рухи вільних систем матеріальних точок і абсолютно твердих тіл. Це пояснюється тим, що Ньютон вивчав рух небесних тіл, які є тілами вільними.

Щоб застосувати закони Ньютона до руху систем матеріальних точок і тіл, які знаходяться на Землі, тобто до невільних систем (а саме з такими системами ми зустрічаємось при розв'язуванні задач, які ставить техніка

перед класичною механікою), треба звести рух невільних тіл до руху вільних тіл. Це робиться за допомогою аксіоми про звільнення від в'язей.

Аксіома про накладання нових в'язей та її окремий випадок — аксіома про твердіння — дають змогу застосувати умови рівноваги, виведені для абсолютно твердих тіл, до вивчення тіл і середовищ, які можуть деформуватись (рідини, гази, пружини, троси тощо).

Аксіома про паралелограм сил і правило многокутника сил показують, як замінити дію двох або кількох сил, прикладених до точки, дією однієї сили. За допомогою цієї аксіоми можна спростити систему сил, прикладених до точки.

Аксіома про абсолютно тверде тіло дає змогу вивести першу теорему механіки про перенесення сили, яка діє на абсолютно тверде тіло, вздовж її лінії дії.

За теоремою про три сили можна раціонально розв'язувати такі задачі статички, де тіло перебуває в рівновазі під дією трьох сил, якщо відомі: вектор однієї сили, лінія дії іншої сили і точка прикладання третьої сили.

При вивченні цієї теми студенти ознайомлюються з питанням про умови рівноваги, коли розглядають умови рівноваги системи сил, що діють на матеріальну точку.

Задача про рівновагу матеріальної точки і твердого тіла — є важливою задачею статички, тому треба добре засвоїти всі умови рівноваги матеріальної точки і твердого тіла і вміти їх використовувати при розв'язуванні задач.

Види в'язей і їхні реакції

Розглянемо види в'язей, що найчастіше трапляються при розв'язанні задач, і зазначимо, як визначити напрям реакцій цих в'язей. Щодо величин цих реакцій, то їх можна знайти з умов рівноваги, оскільки вони залежать від активних сил.

1 Ідеально гладка поверхня (рис. 4.1,а). Точка A контакту тіла з поверхнею може вільно ковзати по ній. Тому реакція ідеально гладенької поверхні напрямлена за нормаллю від поверхні. Реакція позначається \bar{N} або \bar{R}_A .

2 Нерозтяжна нитка (рис. 4.2). Реакція нитки напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення і позначається \bar{T} .

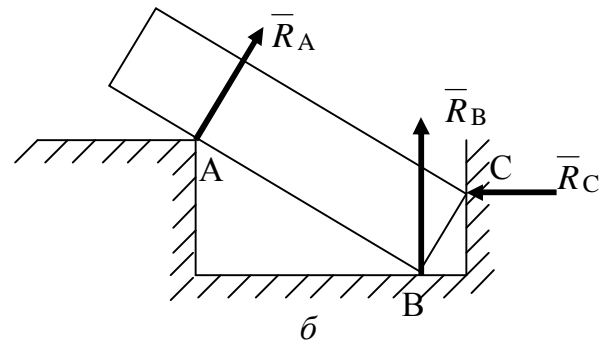
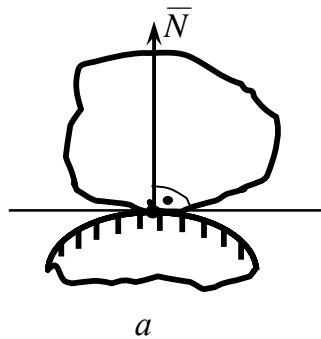


Рисунок 4.1

3 Нерухомий циліндричний шарнір – підшипник (рис. 4.3).

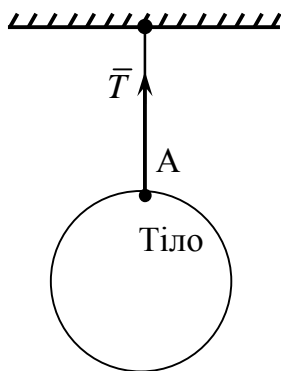


Рисунок 4.2

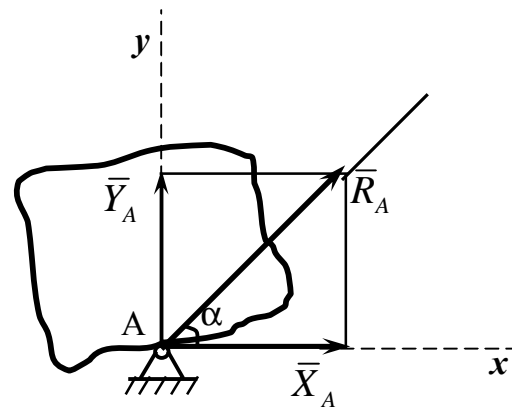


Рисунок 4.3

Напрями таких реакцій в'язей заздалегідь визначити не можна. Реакція такого шарніру \bar{R}_A розміщена в площині, перпендикулярній до його осі Az (на рис. 4.3 не показана). Тому невідомий вектор \bar{R}_A визначається двома складовими \bar{X}_A і \bar{Y}_A за осями Ax і Ay , величини яких знаходять з умов рівноваги. Вектор повної реакції \bar{R}_A визначається формулами:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad \cos \alpha = X_A / R_A. \quad (4.1)$$

4 Нерухомий сферичний шарнір (рис. 4.4).

Невідомий вектор реакції такого шарніра \bar{R}_A визначається трьома складовими \bar{X}_A , \bar{Y}_A і \bar{Z}_A відповідно осям Ax , Ay , Az , величини цих складових знаходять з умов рівноваги.

Вектор повної реакції визначається формулами:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad \cos a = X_A/R_A, \quad \cos b = Y_A/R_A, \quad (4.2)$$

де a і b є кути між вектором \bar{R}_A і осями координат Ax і Ay відповідно.

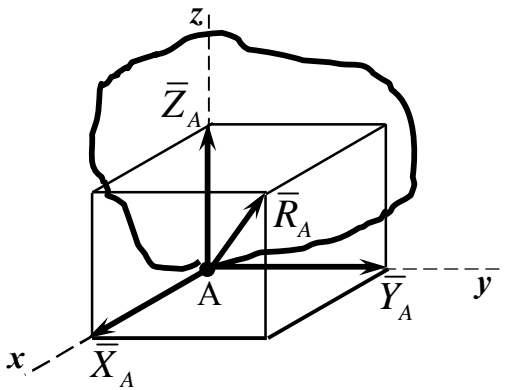


Рисунок 4.4

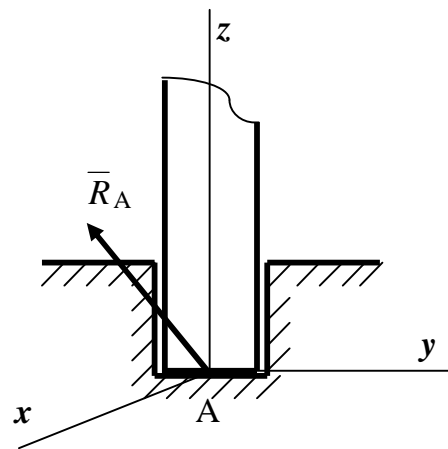


Рисунок 4.5

5 Рухомий циліндричний шарнір.

Рухомий циліндричний шарнір дозволяє зміщувати тіло вздовж осі Ax . Тому в цьому випадку реакція в'язі спрямована перпендикулярно опорній поверхні.

На рисунках 4.6,а, 4.6,б, 4.6,в показані схеми рухомого циліндричного шарніра, які зустрічаються в літературі.

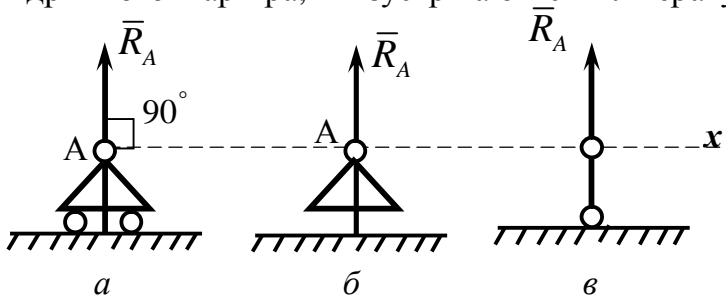


Рисунок 4.6

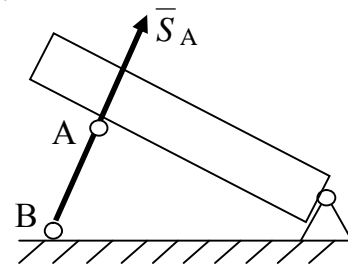


Рисунок 4.7

6 Стрижень шарнірно закріплений на кінцях. Невагомий і не навантажений (рис. 4.7).

Реакція такої в'язі напрямлена вздовж осі стрижня (для прямих стрижнів). Більш конкретний напрямок реакції залежить від того, яке навантаження він має (тиск або розтягування). При розв'язанні задач в якості позитивного навантаження беруть розтягування.

Аналітичний метод розв'язання задач статки ґрунтується на понятті про проекції сили на вісь. Проекція сили на вісь є алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і позитивним напрямом осі. Якщо цей кут гострий - проекція позитивна, якщо тупий - негативна, а якщо сила перпендикулярна осі – її проекція на вісь дорівнює нулю.

Так, для сил, зображених на рисунку 4.8,

$$F_x = F \cos \alpha = ab, \quad Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos j = -de, \quad P_x = 0. \quad (4.3)$$

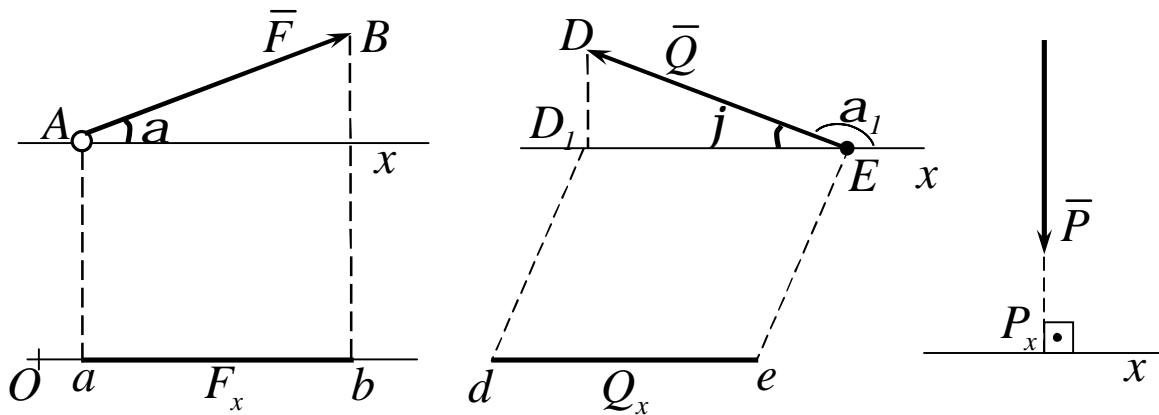


Рисунок 4.8

Проекцією сили \bar{F} на площину Oxy зветься вектор $\bar{F}_{xy} = \overline{OB_1}$, між проекціями початку і кінця сили \bar{F} на цю площину (рис. 4.9).

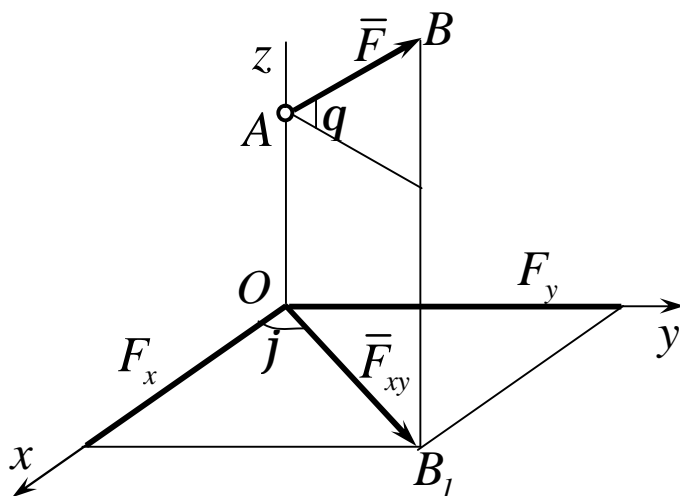


Рисунок 4.9

Таким чином, проекція сили на вісь відрізняється від проекції сили на площину тим, що проекція сили на площину – є величина векторна, так як вона характеризується не тільки своїм числовим значенням, але і напрямком у площині Oxy .

За модулем
$$F_{xy} = F \cos q, \quad (4.4)$$

де q – кут між напрямком сили \vec{F}_i і її проекцією \vec{F}_{xy} .

У деяких випадках для знаходження проекції сили на вісь зручніше знайти спочатку її проекцію на площину, якій належить ця вісь, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на дану вісь. Наприклад, у випадку, зображеному на рисунку 4.9 проекції знайдемо таким способом, що

$$F_x = F_{xy} \cos j = F \cos q \cos j, \quad F_y = F_{xy} \sin j = F \cos q \sin j. \quad (4.5)$$

Вектор, зображаючий силу \vec{F} у просторі, можна відбудувати, якщо звісні модуль F цієї сили і кути a , b , g які задають напрямок сили \vec{F} . Точка A прикладення сили повинна бути задана окремо її координатами x , y , z .

Для розв'язання задач механіки зручніше задавати силу її проекціями F_x , F_y , F_z на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і кути, які вона утворює з координатними осями, за формулами:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \\ \cos a &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos b = \frac{F_y}{F}, \quad \cos g = \frac{F_z}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Якщо всі розглядані сили розташовані в одній площині, то кожен з сил можна задавати її проекціями на дві осі Ox і Oy . Тоді формули, які визначають силу за її проекціям на осі координат, набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \\ \cos a &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos b = \frac{F_y}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

На основі розглянутих прикладів можна дістати висновку, що розв'язання задач статички зводиться до наступних операцій.

1 *Вибір тіла (або тіл), рівновага якого повинна бути розглянута.* Для вирішення задачі необхідно розглянути рівновагу тіла, до якого прикладені задані та шукані сили, або сили, рівні шуканим (наприклад, якщо необхідно знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена числено рівна цій силі реакція опори).

Коли задані сили діють на одне тіло, а шукані на друге, або коли ті та інші сили діють одночасно на декілька тіл, може виявитися необхідним розглянути рівновагу системи цих тіл, або послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2 *Зображення діючих сил.* Установивши рівновагу кожного тіла, або тіл, слід на рисунку зобразити всі діючі на це тіло (або тіла) зовнішні сили, як задані, так і шукані сили, а також реакції всіх в'язей.

3 *Складання умов рівноваги.* Умови рівноваги складають для сил,

діючих на тіло або тіла, рівновага яких розглядається.

4 *Визначення шуканих величин, перевірка вірності рішення і аналіз отриманих результатів.* Велике значення у процесі розв'язання задач має чіткий рисунок. Він допомагає скоріш знайти вірний шлях рішення і запобігти помилок при складанні умов рівноваги і послідовно провести всі викладки.

Усі розрахунки при розв'язанні задач рекомендується, як правило, виконувати в загальному виді (алгебраїчно). Тоді для пошуку величин будуть отримуватись формули, які дають можливість проаналізувати отримані результати. Крім того, розв'язання в загальному вигляді дозволяє іноді виявити зроблені помилки шляхом перевірки розмірностей, так як розмірності із складових в обох частинах рівняння повинні бути однаковими.

Алгебраїчний і векторний моменти пари сил

Властивості сили як вектора не обмежуються тільки цим поняттям наряду з поняттям сили. У механіці використовують поняття пари сил.

Парою сил називають систему двох рівних по модулю паралельних сил, напрямлених у протилежні боки (рис.4.10, 4.11).

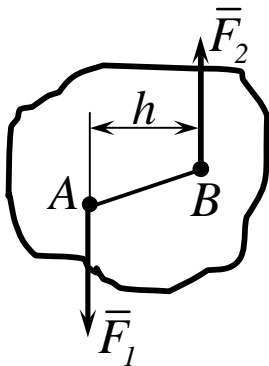


Рисунок 4.10

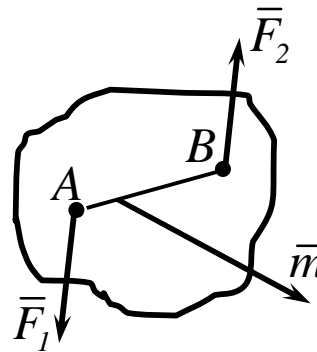


Рисунок 4.11

Система сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , утворюючих пару, не знаходиться в рівновазі, тому, що вони не напрямлені вздовж однієї прямої.

Площина, що проходить через лінії дії пари сил, зветься площиною дії пари.

Відстань h між лініями дії сил пари зветься плечем пари. Дія пари сил на тверде тіло зводиться до деякого обертового ефекту, який характеризується величиною, яку звать моментом пари. Цей момент визначається:

- 1 Модулем, рівним

$$|\bar{m}| = Fh. \quad (4.8)$$

- 2 Положенням у просторі площини дії пари.
- 3 Напрямом повороту пари в цій площині.

Таким чином, як і момент сили відносно центра, пара теж величина векторна. Пара сил відрізняється від моменту сили тим, що її вектор є вільним і може бути прикладений в любій точці тіла.

Алгебраїчний момент пари сил визначається добутком будь-якої з сил пари на її плече, тобто

$$m = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (4.9)$$

На рисунках 4.12, 4.13 показано, як обирається знак (плюс або мінус) пари сил.

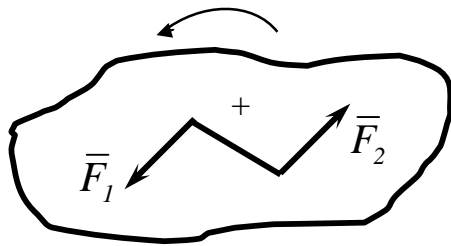


Рисунок 4.12

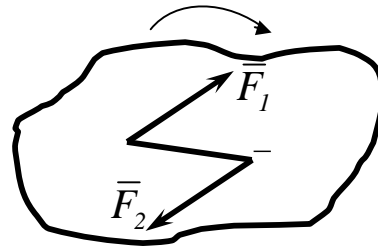


Рисунок 4.13

Векторні та аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Довільна плоска система сил зводиться до більш простої системи сил, складеної із сили і пари сил.

Геометрична сума всіх сил зветься головним вектором системи сил. Він має такий вираз:

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i. \quad (4.10)$$

Отримана пара від зведення системи сил зветься головним алгебраїчним моментом відносно точки зведення. Він має вираз:

$$M_0 = \sum_i m_0(\bar{F}_i). \quad (4.11)$$

Якщо система сил знаходиться у рівновазі, то умови рівноваги записуються відповідно до формул (4.10) і (4.11)

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= 0, \\ M_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Головний вектор сил, які знаходяться в одній площині, можна записати у системі координат xOy .

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}, \quad (4.13)$$

де

$$R_x = \sum_i F_{ix}, R_y = \sum_i F_{iy}. \quad (4.14)$$

Тоді умови рівноваги записані в векторній формі (4.12) із врахуванням формул (4.13) і (4.14) можна записати в аналітичній формі.

$$\left. \begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0, \\ \sum_i m_0(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Групу формул (4.15) називають основними рівняннями рівноваги довільної плоскої системи сил.

Умови рівноваги системи сил, розміщеної в площині, є *окремим випадком умов рівноваги для вільного твердого тіла. Є три аналітичні умови рівноваги системи сил, розміщеної в площині: система сил, розміщених в одній площині, урівноважується, якщо алгебраїчні суми проєкцій сил на дві координатні осі дорівнюють нулю, і алгебраїчна сума моментів сил відносно якої-небудь точки, розміщеної в площині дії сил, дорівнює нулю.*

Існують і дві інші системи трьох рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил: друга і третя. Наводимо їх послідовно.

$$\left. \begin{aligned} \sum_i m_A (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i m_B (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i m_C (\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sum_i m_A (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i m_B (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i \bar{F}_{ix} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16), (4.17)$$

Другу групу формул (4.16) звать теоремою трьох моментів. Вона справедлива тоді, коли моментні точки A , B , C не знаходяться на одній прямій.

При використанні третьої групи формул (4.17) слід пам'ятати, що вісь X не повинна бути перпендикулярна прямій, яка проходить через моментні точки A і B .

Питання для самоперевірки

- 1 У чому полягає правило паралелограма сил?
- 2 Сформулювати аксіоми про в'язі. Яке їх практичне значення?
- 3 Що таке механічна сила і чим вона характеризується?
- 4 Що таке врівноважувальна сила і чим вона відрізняється від рівнодійної?
- 5 Які є способи класифікації сил у механіці?
- 6 Який є спосіб визначення внутрішніх зусиль?
- 7 В яких випадках задача статички про знаходження невідомих сил буде визначеною, а в яких – невизначеною?
- 8 Як знайти вектор-момент сили відносно точки?
- 9 Як обчислити модуль моменту сили відносно точки?
- 10 Чи змінюється момент сили відносно точки при перенесенні сили вздовж її лінії дії?
- 11 В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
- 12 Яка величина повністю характеризує пару сил?
- 13 Які основні властивості пари сил?
- 14 Які є механічні та аналітичні умови рівноваги тіла, яка має дві нерухомі точки?

4.1.1.2 Умова задачі

Жорстка рама, розташована в вертикальній площині, закріплена в точці А шарнірно, а в точці В прикріплена до невагомого стрижня з шарнірами на кінцях або до шарнірної опори на катках.

У точці С до рами закріплений трос, перекинутий через блок, який має на кінці тягар. На раму діють пара сил з моментом $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ та дві сили, значення, напрямки і точки прикладення котрих указані в таблиці 4.1. Зосереджені сили \bar{F} , їх напрямки і точки прикладення указані в таблиці 4.1. Задане рівномірно розподілене навантаження $q_1=20 \text{ кН/м}$.

Визначити реакції в'язей в точках А, В, викликані діючими навантаженнями. При остаточних розрахунках прийняти $a = 0,5 \text{ м}$.

ВКАЗІВКИ. Задача С1 – на рівновагу тіла, яке знаходиться під дією довільної плоскої системи сил.

На початку розв'язування задачі треба переконатися в тому, що задача статично визначена, тобто кількість невідомих величин повинно бути не більше трьох.

При розв'язанні треба врахувати, що натяг обох кінців троса, перекинутого через блок, коли тертям нехтують, однаковий.

Рівняння моментів буде більш простим (містити менше невідомих), якщо брати моменти відносно точки, де перетинаються лінії дії двох реакцій в'язей.

При обчисленні моменту сили \bar{F} , часто зручно розкласти її на складові \bar{F}' та \bar{F}'' , для котрих плечі легко визначаються, і скористатися теоремою Варіньона; тоді

$$m_o(\bar{F}) = m_o(\bar{F}') + m_o(\bar{F}'').$$

Доцільно виконати перевірку правильності рішення задачі.

Для перевірки можна скласти рівняння суми моментів усіх заданих сил і знайдених реакцій в'язей відносно точки, яка не використовувалася в умові рівноваги при складенні рівнянь заданої системи сил.

При правильних розрахунках сума алгебраїчних моментів заданих сил і знайдених реакцій в'язей в перевірочному рівнянні складає нуль.

Таблиця 4.1

Сили	\vec{F}_1		\vec{F}_2		\vec{F}_3		\vec{F}_4		Кут натягу канату	Кут нахилу опорн. поверхні
	$F_1=10 \text{ кН}$		$F_2=20 \text{ кН}$		$F_3=30 \text{ кН}$		$F_4=40 \text{ кН}$			
	Точка прикладення	α_1 град	Точка прикладення	α_2 град	Точка прикладення	α_3 град	Точка прикладення	α_4 град		
0	Н	30	—	—	—	—	К	60	30	60
1	—	—	D	15	Е	30	—	—	60	30
2	К	75	—	—	—	—	Е	30	15	75
3	—	—	К	60	Н	30	—	—	45	30
4	D	60	—	—	—	—	Е	60	30	15
5	—	—	Н	30	—	—	D	60	60	15
6	Е	60	—	—	К	30	—	—	75	30
7	—	—	D	30	—	—	Н	15	75	60
8	Н	30	—	—	D	60	—	—	75	0
9	—	—	Е	75	К	60	—	—	30	60

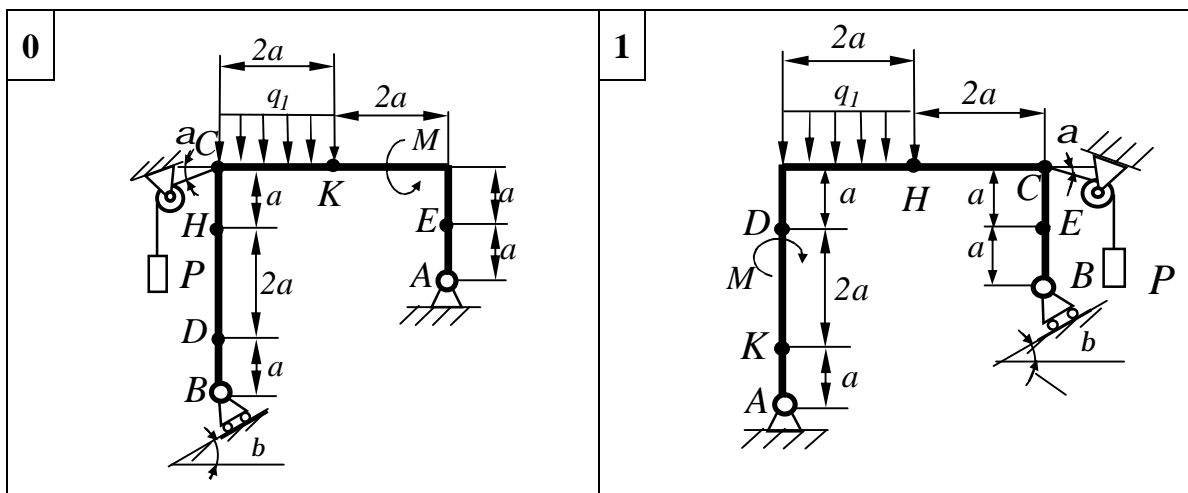


Рисунок 4.14

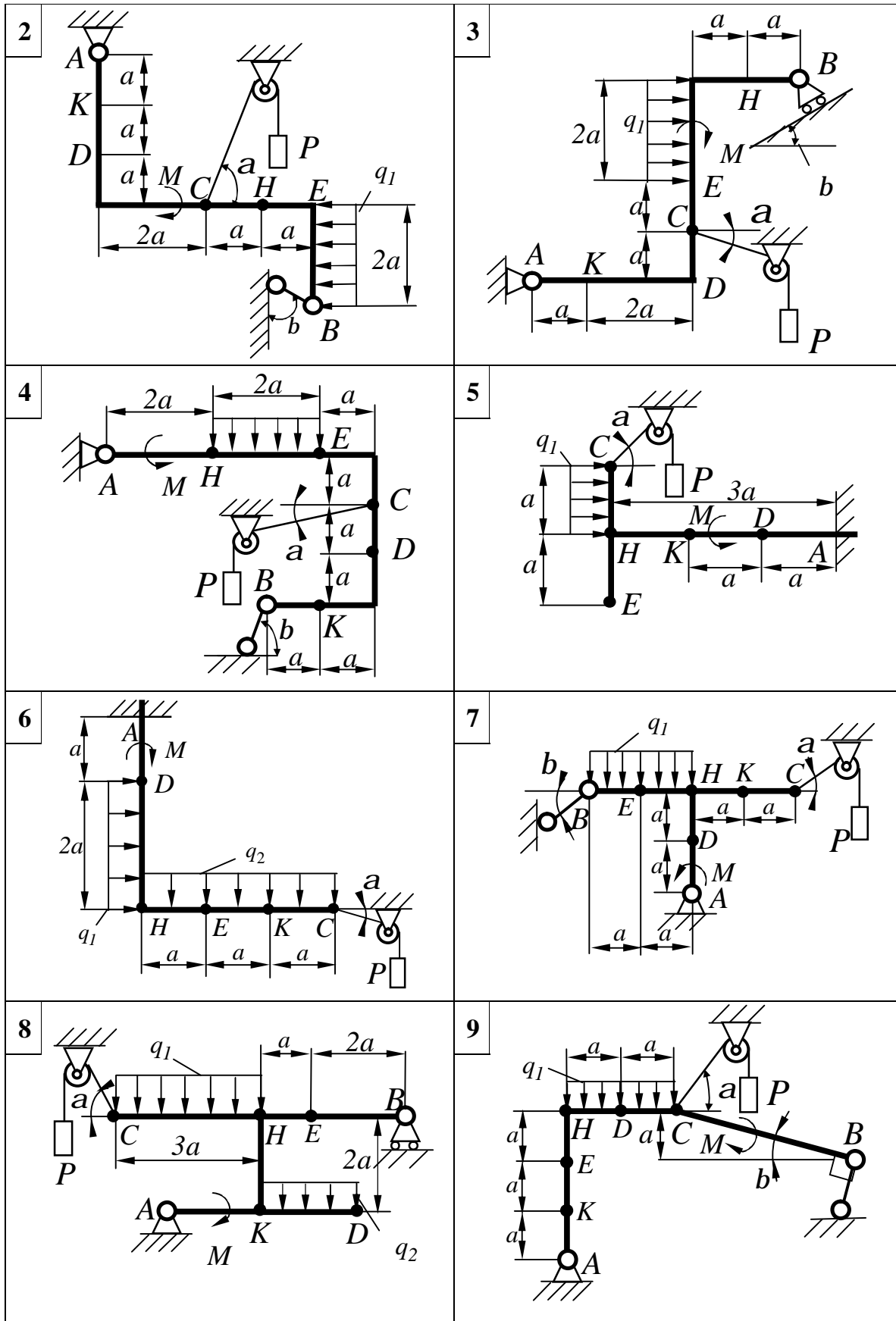


Рисунок 4.14, аркуш2

4.1.1.3 Приклад 1 розв'язання задачі С1

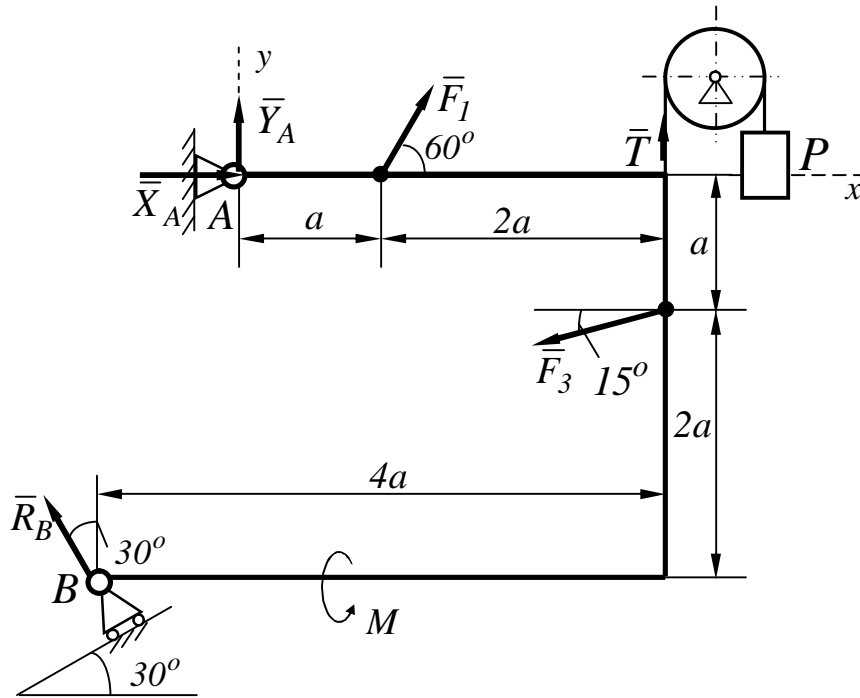


Рисунок 4.15

Дано: $P = 25 \text{кН}$; $M = 100 \text{кН} \cdot \text{м}$; $a = 0,5 \text{м}$; $F_1 = 10 \text{кН}$;
 $F_3 = 30 \text{кН}$.

Знайти: реакції в шарнірах A і B .

Розв'язання

1 Розглянемо рівновагу плоскої рами див.(рис. 4.15). Проведемо координатні осі та зобразимо діючі на раму сили: F_1 і F_3 , пару сил M , натяг тросу T , а також реакції в'язей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$.

2 Для отриманої плоскої системи, складемо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ - F_3 \cdot \cos 15^\circ - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + F_1 \cdot \sin 60^\circ - F_3 \cdot \sin 15^\circ - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_{kx}) = 0; F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot a + F_3 \cdot \sin 15^\circ \cdot 3a - F_3 \cdot \cos 15^\circ \times \\ \times a + T \cdot 3a - R_B \cdot \sin 30^\circ \cdot 3a - R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot a + M = 0 \quad (3)$$

Рівняння (3) містить одне невідоме:

$$R_B = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot a - F_3 \cdot \sin 15^\circ \cdot 3a - F_3 \cdot \cos 15^\circ \cdot a + T \cdot 3a + M}{3a \cdot \sin 30^\circ + a \cdot \cos 30^\circ}$$

$$R_B = \frac{10 \cdot 0,866 \cdot 0,5 + 25 \cdot 3 \cdot 0,5 - 30 \cdot 0,259 \cdot 3 \cdot 0,5 - 30 \cdot 0,966 \cdot 0,5 + 100}{3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,866}$$

$$R_B = 97,8 \text{ (кН)}$$

З рівнянь (1) і (2) знаходимо інші невідомі:

$$X_A = F_3 \cdot \cos 15^\circ + R_B \cdot \sin 30^\circ - F_1 \cdot \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,966 + \\ + 97,8 \cdot 0,5 - 10 \cdot 0,5$$

$$X_A = 72,9 \text{ (кН)}$$

$$Y_A = F_3 \cdot \sin 15^\circ - F_1 \cdot \sin 60^\circ - T - R_B \cdot \cos 30^\circ = 30 \cdot 0,259 - \\ - 10 \cdot 0,866 - 25 - 97,8 \cdot 0,866$$

$$Y_A = -110,6 \text{ (кН)}$$

Для перевірки правильності рішення задачі складемо рівняння суми алгебраїчних моментів усіх сил відносно точки В.

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = Y_A \cdot a - X_A \cdot 3a + F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a - F_1 \cos 60^\circ \cdot 3a + \\ + T \cdot 4a + F_3 \cos 15^\circ \cdot 2a - F_3 \sin 15^\circ \cdot 4a + M = (-110,6) \cdot 0,5 - \\ - 72,9 \cdot 3 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,5 - 10 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 + 25 \cdot 4 \cdot 0,5 + \\ + 30 \cdot 0,966 \cdot 2 \cdot 0,5 - 30 \cdot 0,259 \cdot 4 \cdot 0,5 + 100 = 0$$

$$\text{Відповідь: } X_A = 72,9 \text{ (кН); } Y_A = -110,6 \text{ (кН); } R_B = 97,8 \text{ (кН)}$$

4.1.1.4 Приклад 2 розв'язання задачі С1

Для заданої плоскої рами, яка знаходиться в вертикальній площині і навантажене плоскою системою сил (рис. 4.16).

Знайти реакції жорсткого кріплення А.

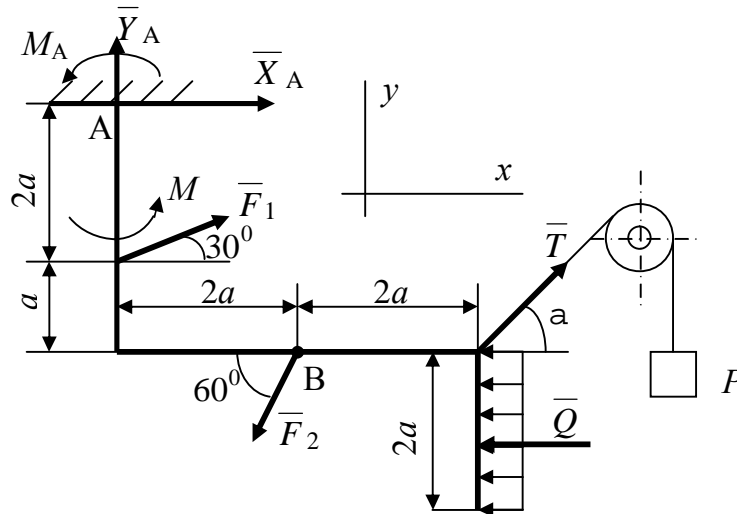


Рисунок 4.16

Дано: $P=25$ кН; $M=100$ кНм; $a=0,5$ м; $F_1=10$ кН; $F_2=20$ кН; $q=20$ кН/м; $\alpha=60^\circ$.

Знайти: реакції жорсткого кріплення А- $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A$.

Розв'язання

1 Розглянемо рівновагу плоскої рами див. (рис. 4.16). Проведемо координатні осі та зобразимо діючі на рамку сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , пару сил M . Дію тягаря P на раму урахуємо натягом тросу \bar{T} , а рівномірне розподілене навантаження замінюємо еквівалентною зосередженою силою \bar{Q} . ($Q = q \cdot 2a$), яку прикладаємо посередині ділянки на яку діє розподілене навантаження.

Дію жорсткого кріплення на раму урахуємо реакціями \bar{X}_A, \bar{Y}_A і M_A .

2 Для отриманої плоскої системи сил, складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; x_A + F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - Q + T \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; y_A + F_1 \sin 30^\circ - F_2 \sin 60^\circ + T \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$M_A + M + F_1 \cos 30^\circ \cdot 2a - F_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3a - F_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2a + T \cdot \cos \alpha \cdot 3a + \\ + T \cdot \sin \alpha \cdot 4a - Q \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

Кожне із складених рівнянь містять по одній невідомій

$$x_A = F_2 \cos 60^\circ + Q - F_1 \cos 30^\circ - T \cos \alpha = 20 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 \cdot 2 - \\ - 10 \cdot 0,866 - 25 \cdot 0,5 = 8,84 \text{ (кН.)}$$

$$y_A = F_2 \sin 60^\circ - F_1 \sin 30^\circ - T \sin \alpha = 20 \cdot 0,866 - 10 \cdot 0,5 - 25 \cdot 0,866$$

$$y_A = -9,33 \text{ (кН.)}$$

$$M_A = F_2 \cos 60^\circ \cdot 3a + F_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2a + Q \cdot 4a - M - T \cdot \cos \alpha \cdot 3a - \\ - T \cdot \sin \alpha \cdot 4a - F_1 \cos 30^\circ \cdot 2a = 20 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,5 + \\ + 20 \cdot 4 \cdot 0,5 - 100 - 25 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 - 25 \cdot 0,866 \cdot 4 \cdot 0,5 = -98,39 \text{ (кНм)}$$

Для перевірки правильності рішення задачі складаємо рівняння суми алгебраїчних моментів усіх сил відносно будь-якої точки, наприклад, точки В.

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0;$$

$$M_A + M - x_A \cdot 3a - Y_A \cdot 2a - F_1 \cos 30^\circ \cdot a - F_1 \cos 30^\circ \cdot a - F_1 \sin 30^\circ \cdot 2a + \\ + T \sin \alpha \cdot 2a - Q \cdot a = \\ = -98,39 + 100 - 8,84 \cdot 3 \cdot 0,5 - (-9,33) \cdot 2 \cdot 0,5 - 10 \cdot 0,866 \cdot 0,5 - \\ - 10 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,5 = 0$$

Відповідь: $x_A=8,84$ кН; $y_A=-9,33$ кН; $M_A=-98,39$ кНм.

4.1.2 ЗАДАЧА С2. Визначення реакцій опор складеної конструкції

4.1.2.1 Стислі відомості з теорії до задачі

Задача С2 – на рівновагу системи тіл, які знаходяться під дією плоскої системи сил.

Статичний розрахунок інженерних споруд у багатьох випадках зводиться до розглядання умов рівноваги конструкції, яка складається з декількох тіл, пов'язаних між собою будь-якими в'язями. Такі в'язи звать внутрішніми. Вони відрізняються від зовнішніх в'язей, бо зовнішні закріплюють конструкцією з тілами, які до неї не входять (наприклад, з опорами).

Якщо після відкидання зовнішніх в'язей (опор) конструкція залишається жорсткою, то для неї задачі статички вирішуються як для абсолютно твердого тіла.

Однак зустрічаються такі інженерні конструкції, які після відкидання зовнішніх в'язей не залишаються жорсткими. Прикладом такої конструкції являється тришарнірна арка (рис. 4.17).

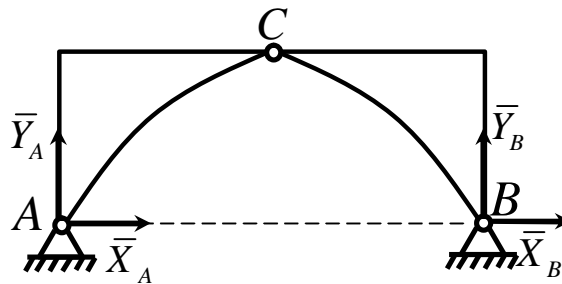


Рисунок 4.17

Якщо відкинути опори A і B , то арка не буде жорсткою, бо її частини зможуть обертатися навколо шарніра C .

При розв'язанні таких задач необхідно додатково розглянути рівновагу будь-якої однієї або декількох частин конструкції.

Наприклад, складаючи умови рівноваги для сил, діючих на тришарнірну арку (рис. 4.17), ми отримаємо три рівняння з чотирма невідомими \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B .

Розглянувши додатково умови рівноваги лівої (або правої) її половини, отримаємо три рівняння, які містять дві нові невідомі \bar{X}_C , \bar{Y}_C (на рис. 4.17 не показані). Вирішуючи отриману систему шести рівнянь,

знайдемо всі шість невідомих.

Другий засіб вирішення подібних задач складається в тому, щоб конструкцію зразу розчленити на окремі тіла і скласти умови рівноваги кожного із тіла окремо. При цьому реакції внутрішніх в'язей будуть попарно рівні за модулем і протилежні за напрямком. Для конструкції із n тіл, на кожне із яких діє довільна плоска система сил, отримаємо таким шляхом $3n$ рівнянь, дозволяючи знайти $3n$ невідомих (при інших системах сил кількість рівнянь відповідно зміниться). Якщо для даної конструкції кількість всіх реакцій в'язей буде більше кількості рівнянь, до яких ці реакції входять, то така конструкція буде статично невизначеною.

4.1.2.2 Умова задачі

Конструкція складається з двох плоских, жорстких тіл AC і BC , котрі в точці C з'єднані одне з одним шарнірно.

Наприклад, T - подібний елемент і стрижень: схеми 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9;

T - подібний елемент і косинець: схема 6.

Зовнішніми в'язями, прикладеними до конструкції, являються:

в точці A жорстка забивка (защемлення), в точці B рухома шарнірна опора. Невагомий стрижень рухомої шарнірної опори B , перпендикулярний опорній поверхні, котра розташована під кутом β до горизонту.

На кожную конструкцію діють дві пари сил M_1 і M_2 , розподілені навантаженням q_1 і q_2 , та дві зосередженні сили.

Ділянка, на котрій діє розподілене навантаження q_1 , зображена на рисунку 4.18. Ділянка, напрям дії та інтенсивність розподіленого навантаження q_2 вказані в таблицях 4.3 та 4.4

Зосереджені сили F , їх напрямки і точки прикладення вказані в таблиці 4. Задане рівномірно розподілене навантаження $q_1 = 20 \text{ кН/м}$.

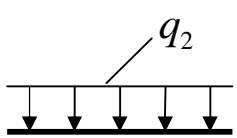
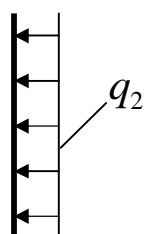
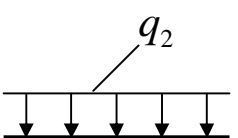
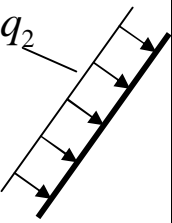
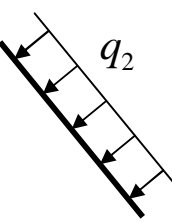
Визначити реакції зовнішніх A і B , і внутрішніх C в'язей, викликаних заданими навантаженнями.

ВКАЗІВКА 1. При визначенні реакції жорсткої забивки А врахувати, що її реакція є силою, модуль і напрямок якої невідомі, та парою сил, момент яких невідомий.

Таблиця 4.2

Сили								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
	Точка прикладення	α_1 град	Точка прикладення	α_2 град	Точка прикладення	α_3 град	Точка прикладення	α_4 град
0	Е	60	—	—	—	—	Л	30
1	—	—	Е	30	Л	60	—	—
2	Л	15	—	—	—	—	Е	60
3	—	—	Л	75	Е	30	—	—
4	Е	30	—	—	Л	15	—	—
5	—	—	Е	75	—	—	Л	60
6	Л	60	—	—	Е	60	—	—
7	—	—	Л	30	—	—	Е	75
8	—	—	—	—	Е	15	Л	30
9	Е	15	Л	60	—	—	—	—

Таблиця 4.3

На Т-елементі		Ділянка на стрижні		
Горизонтальний	Вертикальний	Горизонтальний	Похилий	
		Вар.0,4,5,8,9	Вар.1,3	Вар.2
				

Таблиця 4.4

Номер УМОВ	Розподілена навантажена ділянка	M_1 , кН м	M_2 , кН м	q_2 , кН/м	Кут нахилу опорної поверхні β , град
0	CD	40	30	10	30^0
1	AE	50	60	15	45^0
2	BL	75	55	5	60^0
3	BL	30	25	15	30^0
4	CD	-40	50	10	45^0
5	AE	-50	30	5	60^0
6	CL	-75	40	10	30^0
7	CD	50	-30	15	45^0
8	CL	40	-50	5	60^0
9	AE	75	-40	10	30^0

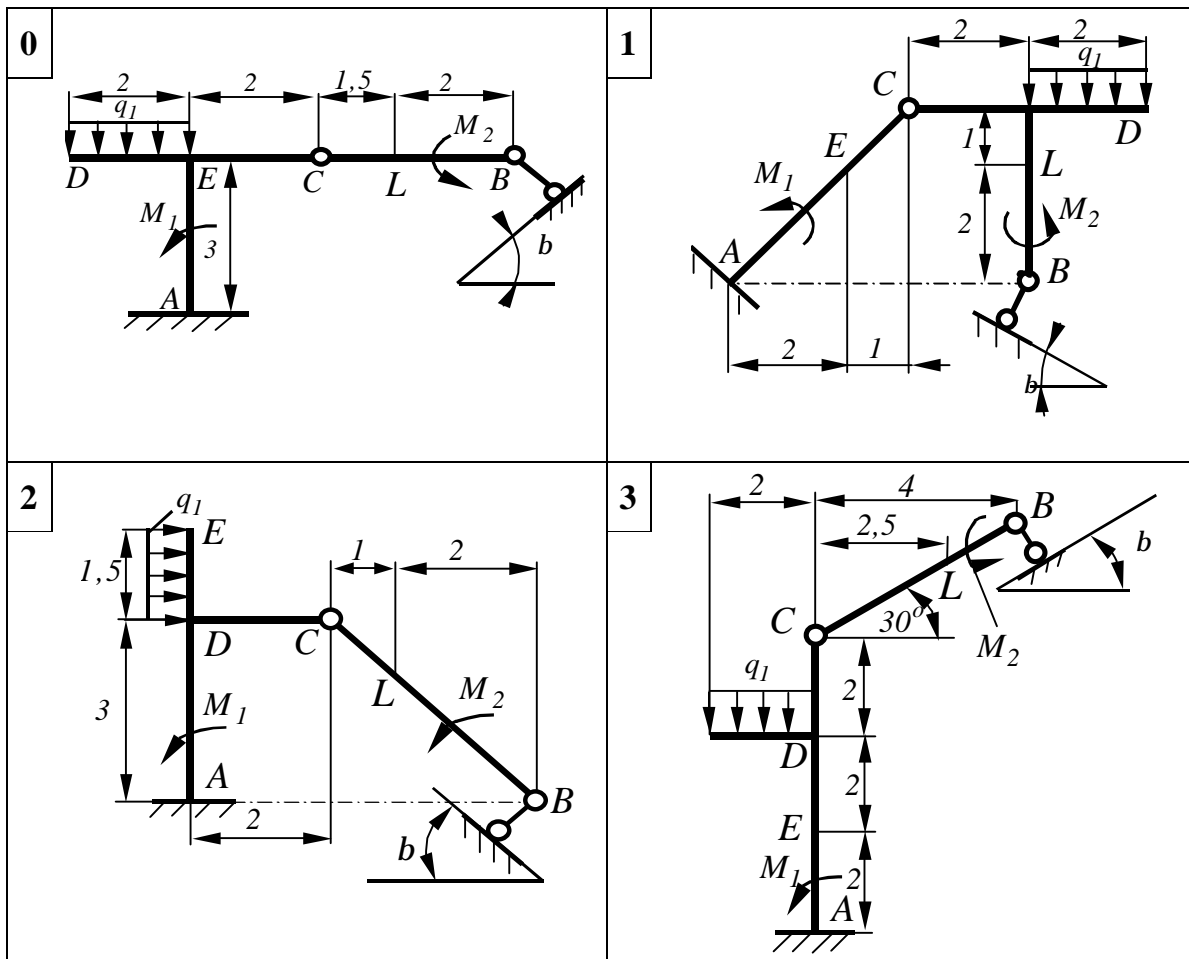


Рисунок 4.18

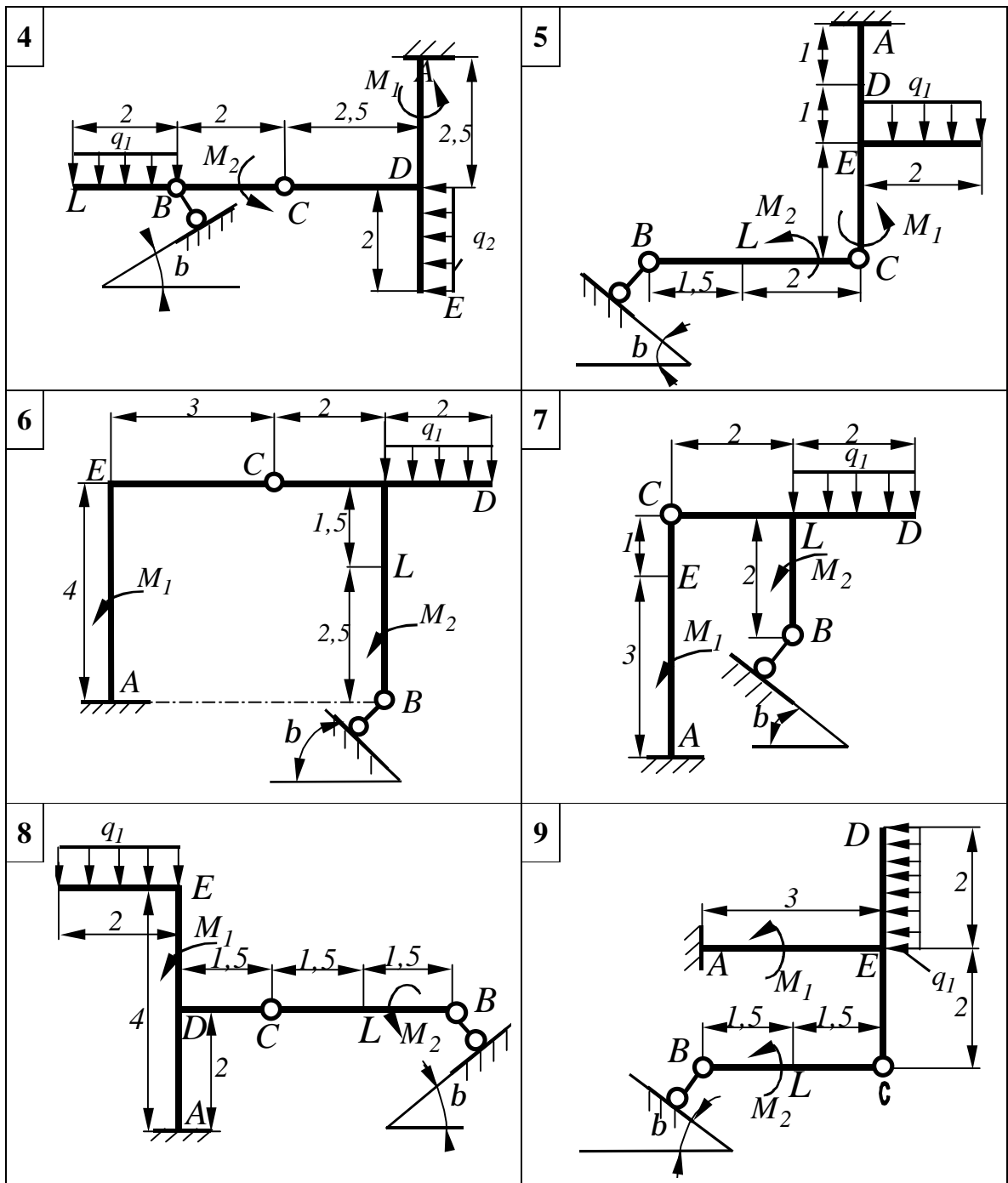


Рисунок 4.18, аркуш 2

ВКАЗИВКА 2. Якщо розподілене навантаження q_2 накладається на ділянку дії заданого навантаження q_1 , то на цій ділянці визначається еквівалентне розподілене навантаження.

ВКАЗИВКА 3. При роботі над виконанням задачі необхідно мати відомі з алгебри знання, а саме, способи розв'язку системи лінійних рівнянь.

Розв'язання системи двох рівнянь першого ступеня з двома невідомими.

І Спосіб підстановки полягає в тому, що:

- 1) із одного рівняння знаходиться вираз одного невідомого, наприклад x , через відомі величини і друге невідоме y ;
- 2) знайдений вираз підставляється у друге рівняння, в якому після підстановки буде мати місце тільки одна невідома y ;
- 3) розв'язанням отриманого рівняння знаходиться значення y ;
- 4) після підстановки відшуканого значення y і вираз невідомого x , знайдений на початку розв'язання, знаходиться значення x .

П Р И К Л А Д. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x - 3y = 46, \\ 5x + 6y = 13. \end{cases}$$

- 1) Із першого рівняння знаходиться вираз x через задані числа і невідому y :

$$x = \frac{46 + 3y}{8}.$$

- 2) Після підстановки цього виразу в друге рівняння замість x знаходимо невідому y :

$$5 \cdot \frac{46 + 3y}{8} + 6y = 13.$$

- 3) Розв'язуємо отримане рівняння відносно y :

$$\begin{aligned} 5(46 + 3y) + 48y &= 104, & 230 + 15y + 48y &= 104, \\ 15y + 48y &= 104 - 230, & 63y &= -126, & y &= -2. \end{aligned}$$

- 4) Знайдене значення $y = -2$ підставляємо у вираз

$$x = \frac{46 + 3y}{8}.$$

Отримаємо:

$$x = \frac{46 - 6}{8} = 5, \text{ тобто } x = 5.$$

II **Спосіб складення або віднімання** полягає в тому, що:

1) Обидві частини заданих рівнянь треба помножити на деякі множники. Ці множники підбираються таким чином, щоб коефіцієнти біля одного з невідомих в обох рівняннях після множення на ці множники мали однакові абсолютні величини.

2) Складаються (віднімаються) ліві та праві частини обох рівнянь при цьому виключається одна з невідомих.

3) Розв'язується отримане рівняння з одним невідомим.

4) Другу невідому можна знайти, користуючись тим же способом, або підстановкою знайденого значення невідомої у будь-яке із заданих рівнянь.

П Р И К Л А Д. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x - 3y = 46, \\ 5x + 6y = 13. \end{cases}$$

1) У заданих рівняннях легко зрівняти коефіцієнти біля невідомої y . Для цього обидві частини першого рівняння треба помножити на 2:

$$\begin{array}{rcl} 8x - 3y = 46 & |x 2| & 16x - 6y = 92, \\ 5x + 6y = 13 & |x 1| & 5x + 6y = 13. \end{array}$$

2) Складаємо два рівняння:

$$\begin{array}{r} 16x - 6y = 92 \\ \underline{+5x + 6y = 13} \\ 21x \quad = 105 \end{array}$$

3) Після розв'язку останнього рівняння:

$$x = \frac{105}{21} = 5.$$

4) Значення $x = 5$ підставляється, наприклад, у перше задане рівняння:

$$8 \cdot 5 - 3y = 46; \quad -3y = 46 - 40; \quad y = -2.$$

Загальні формули розв'язання системи двох рівнянь першого ступеня з двома невідомими.

Для розв'язання системи рівнянь виду

$$ax + by = c, \quad (1)$$

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (2)$$

можна застосовувати визначник другого порядку.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Тобто, кожне із невідомих дорівнює дробу, знаменник якого є визначник, складений із коефіцієнтів біля невідомих, а чисельник отримується із цього визначника заміною коефіцієнтів біля відповідних невідомих на вільні члени

Перетворення визначника в алгебраїчний вираз здійснюється за правилами перехресного множення.

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - rq$$

(знак «+» має той добуток, який належить діагоналі, яка опускається вправо).

Наприклад, $\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-8) = 5 + 16 = 21$

П Р И К Л А Д. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 8x - 3y = 46, \\ 5x + 6y = 13. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 46 & -3 \\ 13 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{46 \cdot 6 + 13 \cdot 3}{8 \cdot 6 + 5 \cdot 3} = \frac{315}{63} = 5,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 46 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8 \cdot 13 - 5 \cdot 46}{8 \cdot 6 + 5 \cdot 3} = \frac{-126}{63} = -2$$

$$x = 5,$$

$$y = -2.$$

4.1.2.3 Приклад 1 розв'язання задачі С2

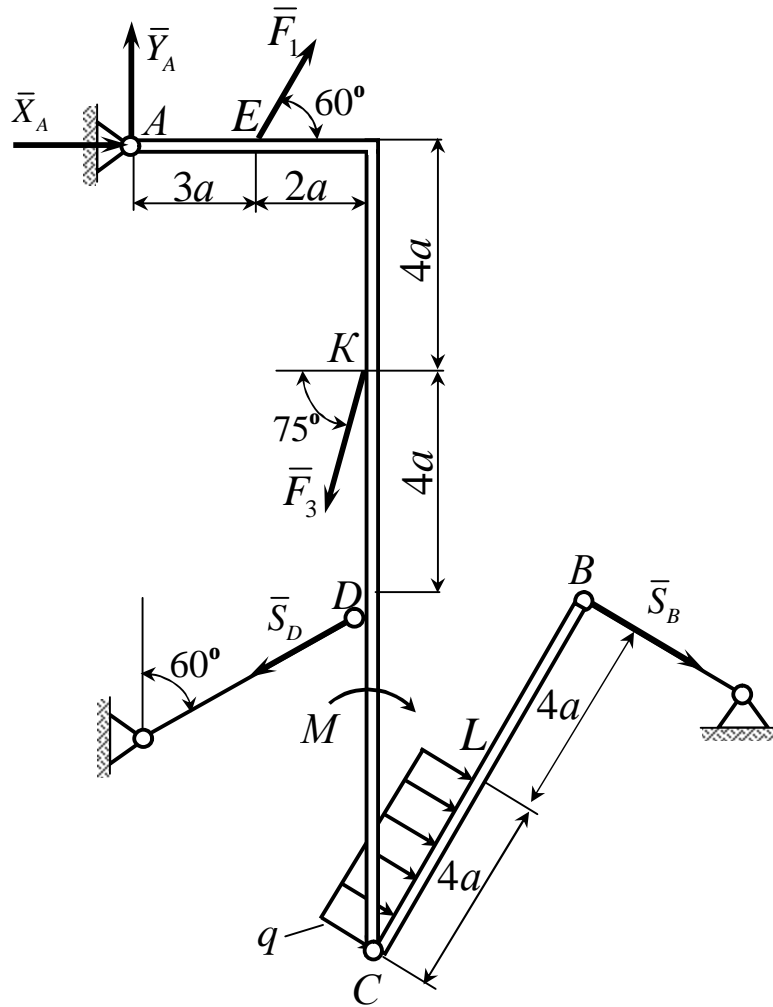


Рисунок 4.19

Дано: $M = 60 \text{ кН м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 0,2 \text{ м}$; $F_1 = 10 \text{ кН}$; $F_2 = 30 \text{ кН}$.

Знайти: реакції в точках А, В і С.

Розв'язання

Для визначення реакцій розчленуємо конструкцію на складові – стрижень ВС і кутник АС.

1 Розглянемо рівновагу стрижня ВС. Зобразимо діючі на стрижень сили: \bar{Q} – рівнодіючу розподіленого навантаження, реакцію \bar{S}_B і складові циліндричного шарніру \bar{X}_C, \bar{Y}_C (рис. 4.20).

$$Q = q \cdot 4 \cdot a, \quad Q = 20 \cdot 4 \cdot 0,2 = 16 \text{ (кН)}.$$

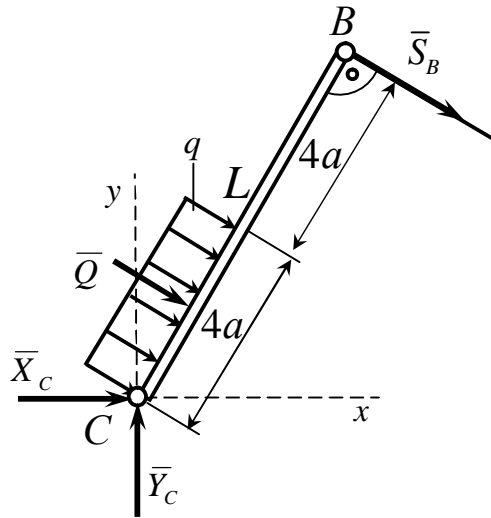


Рисунок 4.20

Для отриманої плоскої системи складемо три рівняння рівноваги.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_C + Q \cdot \cos 30^\circ + S_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_C + Q \cdot \sin 30^\circ - S_B \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_C (F_k) = 0, \quad -Q \cdot 2 \cdot a - S_B \cdot 8 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Рівняння (3) містить одне невідоме:

$$S_B = -\frac{Q \cdot 2a}{8a} = -\frac{Q}{4} = -\frac{16}{4} = -4 \quad (\text{кН}).$$

З рівняння (1) знаходимо X_C

$$X_C = -Q \cdot \cos 30^\circ - S_B \cdot \cos 30^\circ = -16 \cdot 0,866 - (-4) \cdot 0,866 = -10,4 \quad (\text{кН})$$

З рівняння (2) знаходимо Y_C

$$Y_C = Q \cdot \sin 30^\circ + S_B \cdot \sin 30^\circ = 16 \cdot 0,5 + (-4) \cdot 0,5 = 6 \quad (\text{кН})$$

2 Розглянемо рівновагу косинця AC.

Прикладемо до косинця всі діючі на нього сили: \bar{F}_1, \bar{F}_3, M , реакції циліндричного шарніру \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C , (зважаючи на те, що зусилля у внутрішніх в'язях попарно рівні та напрямлені в протилежних напрямках, реакції \bar{X}'_C і \bar{Y}'_C , з боку відкинutoї частини, направляємо в напрямках, протилежних \bar{X}_C і \bar{Y}_C . Реакцію стрижня \bar{S}_D . Передбачаємо, стрижень

DD' у конструкції несе зусилля розтягування. Реакції \bar{S}_D напрямляємо від вузла D. Дію шарнірно-нерухомої опори A замінюємо реакціями \bar{X}_A та \bar{Y}_A (рис. 4.21).

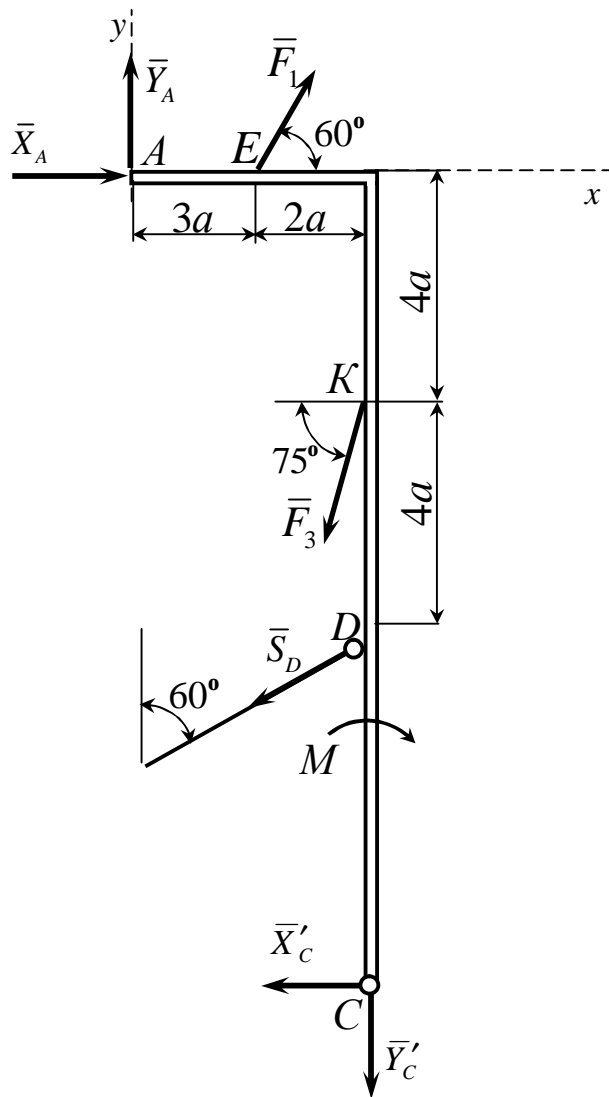


Рисунок 4.21

На кутник діє плоска система довільно розташованих сил.

Для отриманої плоскої системи складемо три рівняння рівноваги.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - X_C' - S_D \cdot \cos 30^\circ - F_3 \cdot \cos 75^\circ + F_1 \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - Y_C' - S_D \cdot \sin 30^\circ - F_3 \cdot \sin 75^\circ + F_1 \cdot \sin 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_A(F_k) = 0, \quad F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3a - F_3 \cdot \cos 75^\circ \cdot 3a - F_3 \cdot \sin 75^\circ \cdot 5a - S_D \cdot \cos 30^\circ \cdot 6a - S_D \cdot \sin 30^\circ \cdot 5a - M - X_C' \cdot 10a - Y_C' \cdot 5a = 0 \quad (6)$$

Рівняння (6) містить одне невідоме:

$$S_D = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3a - F_3 (3 \cdot \cos 75^\circ + 5 \cdot \sin 75^\circ) - M - X_C' \cdot 10a - Y_C' \cdot 5a}{a(6 \cdot \cos 30^\circ + 5 \cdot \sin 30^\circ)} =$$

$$= \frac{10 \cdot 0,866 \cdot 3 \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,2(3 \cdot \cos 75^\circ + 5 \cdot \sin 75^\circ) - 60 + 10,4 \cdot 10 \cdot 0,2 - 6 \cdot 5 \cdot 0,2}{0,2(6 \cdot 0,866 + 5 \cdot 0,5)};$$

$$S_D = -47,8 \text{ (кН)}$$

З рівняння (4) знаходимо значення:

$$X_A = X_C' + S_D \cdot \cos 30^\circ + F_3 \cdot \cos 75^\circ - F_1 \cdot \cos 60^\circ = -10,4 + (-47,8) \cdot 0,866 + 30 \cdot 0,259 - 10 \cdot 0,5;$$

$$X_A = -49,1 \text{ (кН)}$$

З рівняння (5) знаходимо:

$$Y_A = Y_C' - F_1 \cdot \sin 60^\circ + F_3 \cdot \sin 75^\circ + S_D \cdot \sin 30^\circ = 6 - 10 \cdot 0,866 + 30 \cdot 0,966 + (-47,8) \cdot 0,5;$$

$$Y_A = 2,42 \text{ (кН)}$$

Відповідь: $X_A = -49,1 \text{ кН}$; $Y_A = 2,42 \text{ кН}$; $S_D = -47,8 \text{ кН}$; $X_C = -10,4 \text{ кН}$;
 $Y_C = 6 \text{ кН}$; $S_B = -4 \text{ кН}$.

4.1.2.4 Приклад 2 розв'язання задачі С2

Для заданої складеної з двох тіл плоскої конструкції (рис. 4.22), яка навантажена плоскою системою сил, визначити реакції зовнішніх і внутрішніх в'язей.

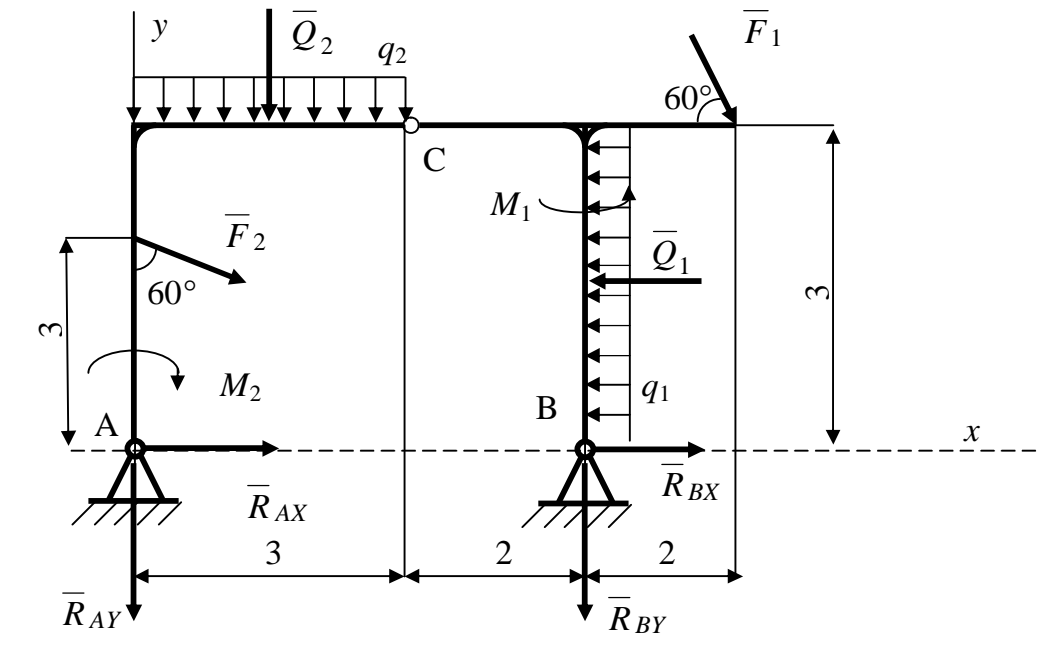


Рисунок 4.22

Дано: $F_1=10$ кН; $F_2=20$ кН; $q_1=20$ кН/м; $q_2=10$ кН/м; $M_1=40$ кН·м; $M_2=-30$ кН·м; $Q_2=10 \cdot 3=30$ кН; $Q_1=20 \cdot 3=60$ кН.

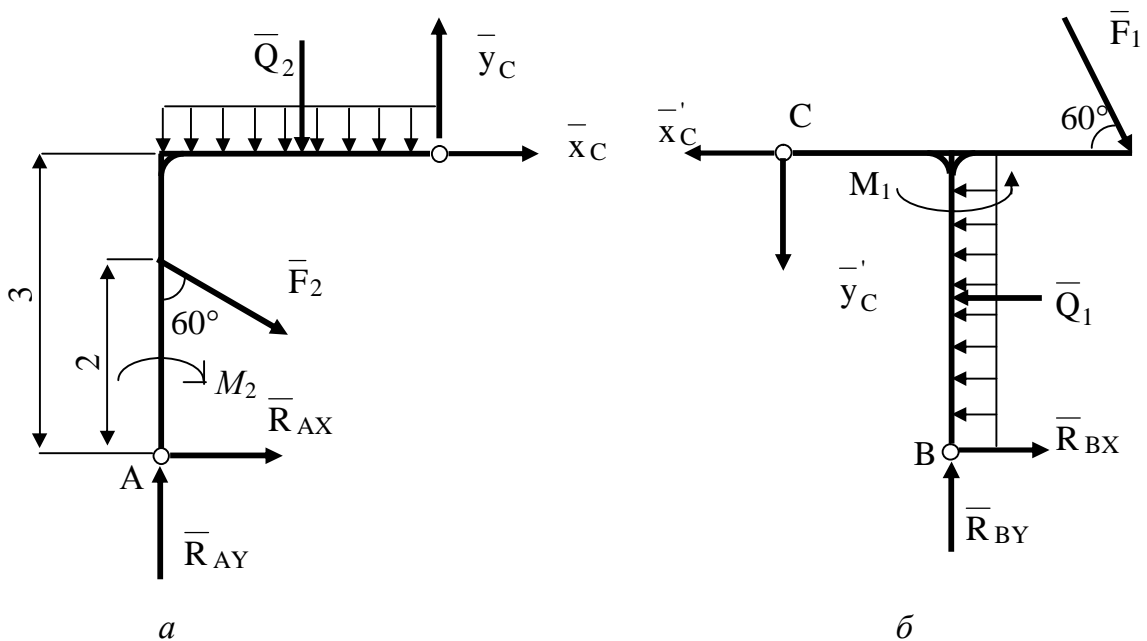


Рисунок 4.23

Розв'язання

Розглянемо спочатку рівновагу всієї конструкції після звільнення її від зовнішніх в'язей – нерухомих циліндричних шарнірів А і В (рис. 4.23).

Складемо рівняння умови рівноваги у другій формі:

$$\sum M_A(F_K) = 0; \quad (1), \quad \sum M_B(F_K) = 0; \quad (2), \quad \sum F_{KX} = 0; \quad (3)$$

$$1) R_{BY} \cdot 5 + Q_1 \cdot 1,5 + M_1 - F_1 \cos 60^\circ \cdot 3 - F_1 \sin 60^\circ \cdot 7 - Q_2 \cdot 1,5 - \\ - M_2 - F_2 \sin 60^\circ \cdot 2 = 0$$

$$2) - R_{AY} \cdot 5 - M_2 - F_2 \sin 60^\circ \cdot 2 + F_2 \cos 60^\circ \cdot 5 + Q_2 \cdot 3,5 + M_1 - \\ - F_1 \sin 60^\circ \cdot 2 - F_1 \cos 60^\circ \cdot 3 + Q_1 \cdot 1,5 = 0.$$

$$3) R_{AX} + R_{BX} + F_1 \cos 60^\circ + F_2 \sin 60^\circ - Q_1 = 0$$

До перших двох рівнянь входить по одній невідомій, які можна визначити.

$$R_{AY} = \frac{F_2 \cos 60^\circ \cdot 5 + Q_2 \cdot 3,5 + M_1 + Q_1 \cdot 1,5 - M_2 - F_1 \cos 60^\circ \cdot 3 - F_1 \sin 60^\circ \cdot 2}{5} = \\ = \frac{20 \cdot 0,5 \cdot 5 + 30 \cdot 3,5 + 40 + 60 \cdot 1,5 - 30 - 20 \cdot 0,866 \cdot 2 - 10 \cdot 0,5 \cdot 3 - 10 \cdot 0,866 \cdot 2}{5} = \\ = 37,61 \text{ (кН)}$$

$$R_{BY} = \frac{F_1 \cos 60^\circ \cdot 3 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 7 + Q_2 \cdot 1,5 + M_2 + F_2 \sin 60^\circ \cdot 2 - Q_1 \cdot 1,5 - M_1}{5} = \\ = \frac{10 \cdot 0,5 \cdot 3 + 10 \cdot 0,866 \cdot 7 + 30 \cdot 1,5 + 30 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 - 60 \cdot 1,5 - 40}{5} = 11,05 \text{ (кН)}$$

Для визначення складових реакції внутрішньої в'язи С заданої конструкції останню треба розчленувати на складові елементи і розглянути рівновагу будь-якого із елементів. (рис. 4.23 а), б),).

Розглядаємо наприклад рівновагу косинця АС.

$$\sum F_{KX} = 0; \quad R_{AX} + X_C + F_2 \sin 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \quad R_{AY} + Y_C - Q_2 - F_2 \cos 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_C(\bar{F}_K) = 0; \quad Q_2 \cdot 1,5 + F_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 + F_2 \cos 60^\circ \cdot 3 - M_2 + R_{AX} \cdot 3 - R_{AY} \cdot 3 = 0 \quad (6)$$

У рівнянні (6) одна невідома - R_{AX} ,

$$R_{AX} = \frac{R_{AY} \cdot 3 + M_2 - F_2 \cos 60^\circ \cdot 3 - F_2 \sin 60^\circ \cdot 1 - Q_2 \cdot 1,5}{3} =$$

$$= \frac{37,61 \cdot 3 + 30 - 20 \cdot 0,5 \cdot 3 - 20 \cdot 0,866 - 30 \cdot 1,5}{3} = 16,84 \text{ (кН)}$$

$$R_{AX} = 16,84 \text{ кН.}$$

Тоді із рівнянь (4) і (5) можна знайти невідомі складові реакції циліндричного шарніра C .

$$X_C = -R_{AX} - F_2 \sin 60^\circ = -16,84 - 20 \cdot 0,866 = -34,16 \text{ (кН)}$$

$$Y_C = Q_2 + F_2 \cos 60^\circ - R_{AY} = 30 + 20 \cdot 0,5 - 37,61 = 2,39 \text{ (кН)}$$

Оскільки складову реакцію нерухомої шарнірної опори R_{AX} знайдено із рівняння (3) можна знайти останню невідому R_{BX} .

$$R_{BX} = Q_1 - R_{AX} - F_1 \cos 60^\circ - F_2 \sin 60^\circ =$$

$$= 60 - 16,84 - 10 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,866 = 20,84 \text{ (кН)}$$

Для перевірки правильності рішення задачі складаємо рівняння суми алгебраїчних моментів усіх сил відносно точки C .

$$\sum M_C(\bar{F}_K) = 0; \quad Q_2 \cdot 1,5 + F_2 \sin 60^\circ \cdot 1 + F_2 \cos 60^\circ \cdot 3 + R_{AX} \cdot 3 -$$

$$- R_{AY} \cdot 3 - M_2 - F_1 \sin 60^\circ \cdot 4 + M_1 - Q_1 \cdot 1,5 + R_{BY} \cdot 2 + R_{BX} \cdot 3 = 0$$

$$30 \cdot 1,5 + 20 \cdot 0,866 \cdot 1 + 20 \cdot 0,5 \cdot 3 + 16,84 \cdot 3 - 37,61 \cdot 3 - 30 -$$

$$- 10 \cdot 0,866 \cdot 4 + 40 - 60 \cdot 1,5 + 11,05 \cdot 2 + 20,84 \cdot 3 = 0$$

Відповідь: $R_{AX} = 16,84 \text{ кН}$; $R_{AY} = 37,61 \text{ кН}$; $R_{BX} = 20,84 \text{ кН}$;
 $R_{BY} = 11,05 \text{ кН}$; $X_C = -34,16 \text{ кН}$; $Y_C = 2,39 \text{ кН}$.

4.1.3 ЗАДАЧА СЗ. Визначення реакцій опор твердого тіла

4.1.3.1 Стислі відомості з теорії до задачі

Задача СЗ – на рівновагу тіла, яке знаходиться під дією системи сил, довільно розташованих у просторі.

Виведення умов рівноваги довільної просторової системи сил засновано на лемі, яка має таке формулювання: не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, прикладену до цього тіла, можна перенести у будь-яку його точку паралельно самій собі, додаючи при цьому приєднану пару.

Момент приєднаної пари дорівнює моменту цієї сили відносно центра зведення.

Нехай задано довільну систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, що діють на тверде тіло. Головним вектором \bar{R} цієї системи сил називаються векторна система всіх сил, які входять до системи:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Головним моментом такої системи сил відносно точки O (центра зведення) називається векторна сума моментів усіх сил, що входять до системи, відносно того самого центра:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_i), \quad (4.18)$$

де

$$\sum_{i=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \quad (4.19)$$

Тут \bar{r}_i – радіус-вектор сили \bar{F}_i відносно центра O .

Проектуючи ліві та праві частини виразів (4.18) і (4.19) на осі декартової системи координат $Oxyz$, легко встановити аналітичні вирази для головного вектора і головного моменту у вигляді:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (4.20)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_x(\overline{F}_i); \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_y(\overline{F}_i); \quad M_z = \sum_{i=1}^n m_z(\overline{F}_i), \quad (4.21)$$

де

$$\sum_{i=1}^n m_x(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}),$$

$$\sum_{i=1}^n m_y(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}),$$

$$\sum_{i=1}^n m_z(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}).$$

Тут R_x, R_y, R_z і M_x, M_y, M_z – проекції відповідно головного вектора \overline{R} і головного моменту \overline{M}_0 на осі координат

Наведемо основну теорему статички

Довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити однією з еквівалентних систем, яка:

1) складається з однієї сили, що прикладена в довільно обраному центрі зведення і дорівнює головному вектору цієї системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно обраного центра зведення;

2) складається з двох, у загальному випадку, мимобіжних сил, одна з яких прикладена в центрі зведення, а інша – в певній точці.

Якщо обмежитися першою частиною сформульованої теореми, то дійдемо до відомої теореми Пуансона.

За допомогою основної теореми статички отримуються ***умови рівноваги довільної просторової системи сил.***

Нехай задано довільну просторову систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, прикладених до твердого тіла.

Для того, щоб довільна просторова система сил була в рівновазі (еквівалентна нулю), необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю, тобто:

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = 0; \quad \bar{M}_0 = \sum_i \bar{m}_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (4.22)$$

Умови (4.22) називаються умовами рівноваги довільної системи сил у векторній (геометричній) формі.

Проектуючи векторні рівності (4.22) на осі координат, дістаємо умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_i F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ R_y = \sum_i F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ R_z = \sum_i F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0, \\ M_x = \sum_i m_x(\bar{F}_i) = m_x(\bar{F}_1) + m_x(\bar{F}_2) + \dots + m_x(\bar{F}_n) = 0, \\ M_y = \sum_i m_y(\bar{F}_i) = m_y(\bar{F}_1) + m_y(\bar{F}_2) + \dots + m_y(\bar{F}_n) = 0, \\ M_z = \sum_i m_z(\bar{F}_i) = m_z(\bar{F}_1) + m_z(\bar{F}_2) + \dots + m_z(\bar{F}_n) = 0. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно осей координат дорівнювали нулю.

Таким чином, при розв'язанні задач про рівновагу просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, з системи рівнянь (4.23) можна визначити шість невідомих величин.

ВКАЗІВКИ. При розв'язанні задачі треба замінити накладенні на тіло в'язі реакціями. Для визначення шуканих величин потрібно скласти шість рівнянь рівноваги.

Слід мати на увазі, що при знаходженні проекції сили на вісь, частіше буває легше спочатку знайти її проекцію на координатну площину, в котрій розташована ця вісь, а потім відшукану проекцію спроекувати на дану вісь. Саме так, при визначенні моменту сили відносно вісі, нерідко буває зручно розкласти силу на взаємно перпендикулярні складові, одна з котрих паралельна якій-небудь координатній вісі.

4.1.3.2 Умова задачі

(До схем 0..2).

На горизонтальний вал, котрий може обертатися у підшипниках A і B , насаджені два шківів. (рис. 4.24).

Радіуси шківів дорівнюють $r_1 = 12 \text{ см}$; $r_2 = 15 \text{ см}$; гілки ременів з кожного шківів паралельні між собою і утворюють відповідно кути α_1 з горизонталлю та α_2 з вертикаллю.

Нехтуючи вагою шківів й вала, **знайти натяг головної T й веденої t гілок ременя, а також реакції підшипників при рівновазі вала.**

(До схем 3..5).

На горизонтальний вал насаджено колесо радіуса $r_1 = 12 \text{ см}$. Перпендикулярно вісі вала до нього жорстко прикріплений важіль CD довжиною $l = 20 \text{ см}$, утворюючий з горизонтальною площиною кут α_1 .

Нитка (трос), намотана на колесо і натягнута важелем F , сходить з нього за дотичною, нахиленою під кутом α_2 до горизонту.

Сила P , яка прикладена до кінця важеля CD , розташована завжди у вертикальній площині перпендикулярно важелю (рис. 4.24, аркуш 2).

Нехтуючи тертям на блоці, **визначити силу P , при якій вал знаходиться у рівновазі, а також реакції підшипників A та B .**

(До схем б..9).

На горизонтальний вал насаджені колеса 1 і 2 радіусів $r_1 = 12\text{ см}$, і $r_2 = 15\text{ см}$. (рис. 4.24, аркуш 3).

Перпендикулярно вісі вала до нього жорстко прикріплений горизонтальний важіль CD , довжиною $l = 20\text{ см}$.

За дотичною до колеса 1 прикладена сила F , утворююча з горизонталлю кут α_1 , а до іншого колеса сила T_2 , утворююча з вертикаллю кут α_2 .

На кінець важеля діє вертикальна сила P .

Визначити силу P , при якій вал знаходиться у рівновазі, а також реакції підшипників A та B .

Таблиця 4.5(для схем 0..2)

Номер умови	Вихідні дані						
	a , м	b , м	c , м	α_1 , град	α_2 , град	t_2 , кН	T_2 , кН
0	1	1,2	1,5	30	60	1	1,5
1	1,5	1	1,2	60	30	1,5	2
2	1,2	1,5	1,8	90	15	1,2	2,2
3	1,8	1,2	1,5	15	90	1,5	2,5
4	2	2,2	2,5	15	30	1,6	2,8
5	2,5	2	2,2	75	60	1,8	2
6	2,4	2,6	2,8	30	75	2,2	2,4
7	2,8	2,4	2,6	60	15	2,5	2,8
8	1,2	2	2,4	75	15	2,8	3,0
9	1,5	2	2,5	90	90	3,2	3,4

Таблиця 4.6 (для схем 3..5)

Номер умови	Вихідні дані					
	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$\alpha_1, град$	$\alpha_2, град$	$F, кН$
0	1	1,2	1,5	30	60	5
1	1,5	1	1,2	60	30	8
2	1,2	1,5	1,8	90	15	10
3	1,8	1,2	1,5	15	90	15
4	2	2,2	2,5	15	30	18
5	2,5	2	2,2	75	60	20
6	2,4	2,6	2,8	30	75	22
7	2,8	2,4	2,6	60	15	24
8	1,2	2	2,4	75	15	25
9	1,5	2	2,5	90	90	27

Таблиця 4.7 (для схем 6..9)

Номер умови	Вихідні дані							
	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$d, м$	$\alpha_1, град$	$\alpha_2, град$	$F, кН$	$T, кН$
0	1	1,2	1,5	2,5	30	60	1	1,5
1	1,5	1	1,2	2,4	60	30	1,5	2,0
2	1,2	1,5	1,8	2,6	90	15	1,8	2,5
3	1,8	1,2	1,5	2,8	15	90	2	2,8
4	2	2,2	2,5	2,2	15	30	2,4	2,6
5	2,5	2	2,2	2,5	75	60	3,0	1,5
6	2,4	2,6	2,8	1,5	30	75	2,8	2,0
7	2,8	2,4	2,6	1,8	60	15	2,6	2,4
8	1,2	2	2,4	1,2	75	15	2,4	1,8
9	1,5	2	2,5	1,5	90	90	3,2	2,2

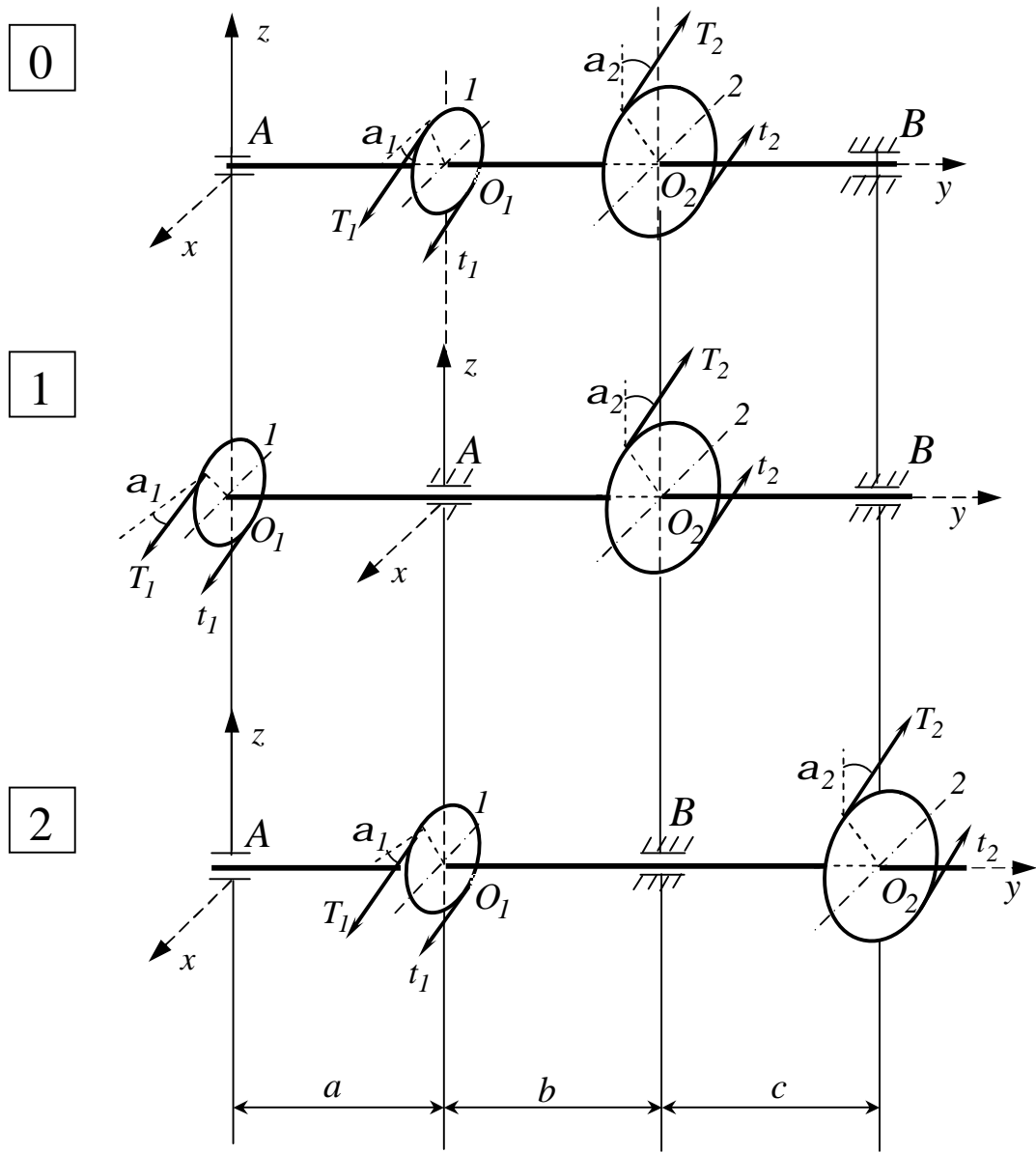


Рисунок 4.24

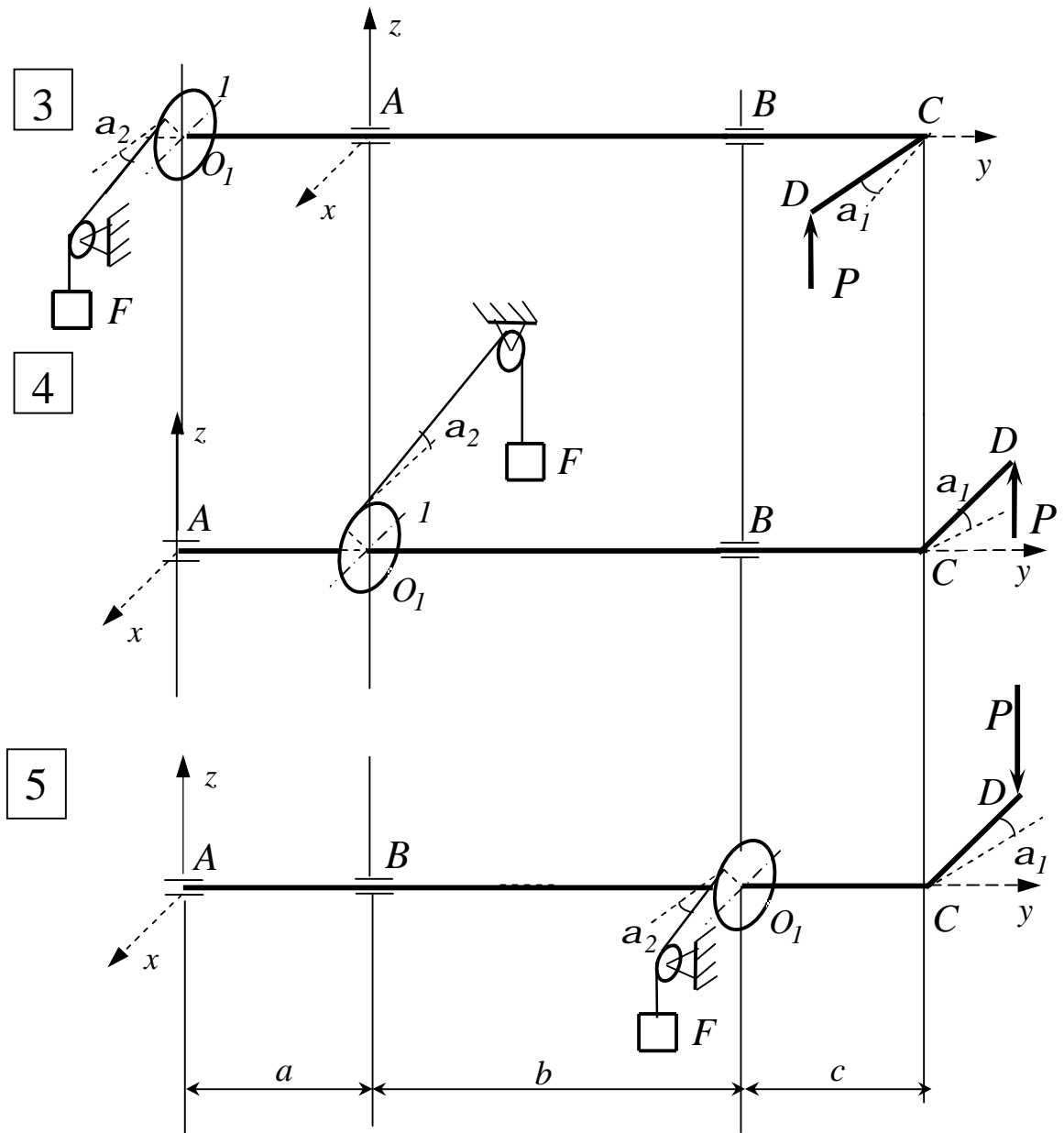


Рисунок 4.24, аркуш 2

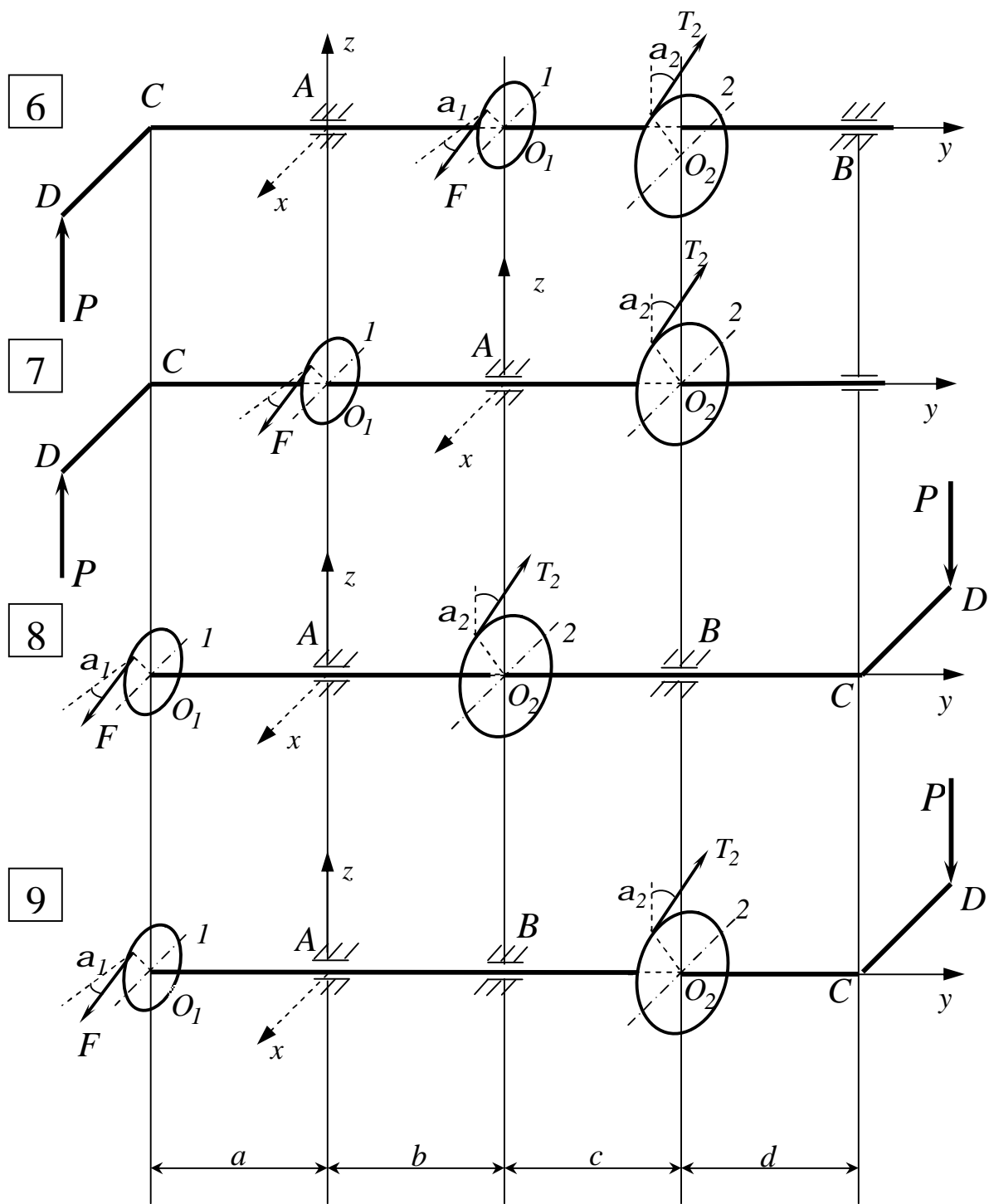


Рисунок 4.24, аркуш 3

4.1.3.3 Приклади розв'язання задачі СЗ

Приклад 1

За допомогою коловорота, схематично зображеного на рисунку 4.25, утримується вантаж Q . Радіус барабана – R . Вірвовка сходить з барабану за дотичною, нахиленою до горизонту під кутом 60° .

Дано: $Q = 1 \text{ кН}$, $R = 5 \text{ см}$, $KD = 40 \text{ см}$, $AD = 30 \text{ см}$,
 $AC = 40 \text{ см}$, $CB = 60 \text{ см}$.

Знайти: тиск P на рукоятку і реакції опор A та B при тому положенні коловорота, коли рукоятка KD горизонтальна.

Розв'язання

1 Розглянемо рівновагу конструкції. На конструкцію діють сила P і вантаж Q . Накладені на конструкцію в'язі заміняємо їхніми реакціями.

Реакції циліндричних шарнірів A і B розкладемо на складники \bar{X}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B и \bar{Z}_B , дивись (рис. 4.25).

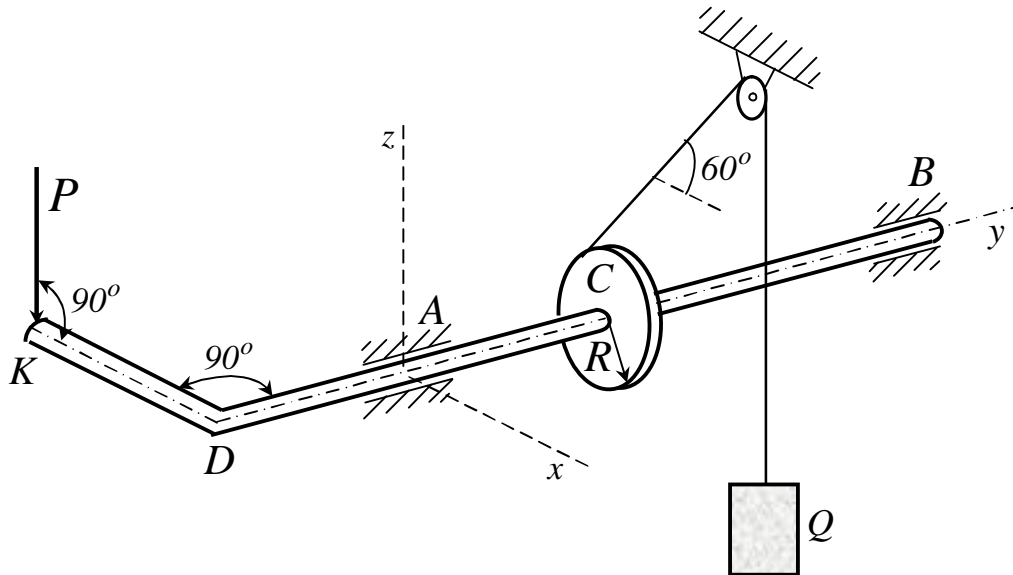


Рисунок 4.25

2 Для визначення сили P і реакції опор \bar{X}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Z}_B складемо рівняння рівноваги, діючої на конструкцію системи сил (див.рис.4.26).

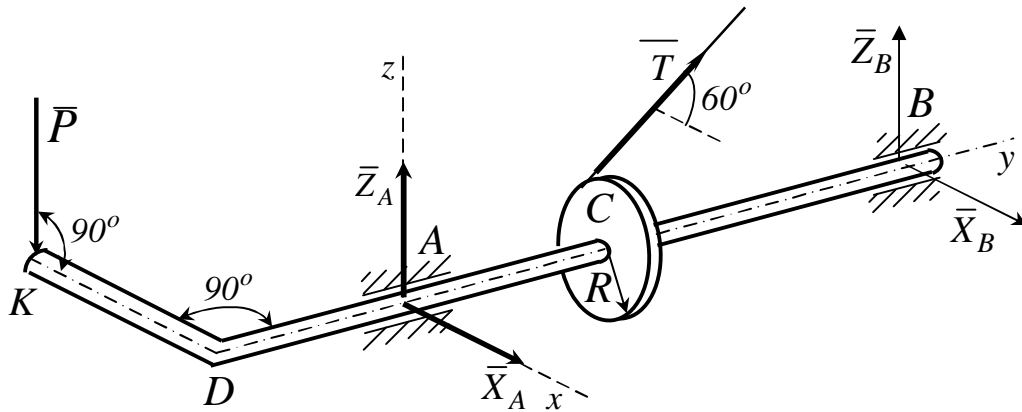


Рисунок 4.26

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + T \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B + T \cdot \sin 60^\circ - P = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad P \cdot DA + T \cdot \sin 60^\circ \cdot AC + Z_B \cdot (AC + CB) = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \cdot KD + T \cdot R = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0, \quad -T \cdot \cos 60^\circ \cdot AC - X_B \cdot (AC + CB) = 0. \quad (5)$$

Підставив у складені рівняння числові значення всіх заданих величин і розв'язав ці рівняння, знайдемо шукані величини.

Відповідь: $P = 125 \text{ Н}$, $X_A = -300 \text{ Н}$, $Z_A = -357 \text{ Н}$, $X_B = -200 \text{ Н}$, $Z_B = -384 \text{ Н}$. Знак «мінус» вказує, що реакції \bar{X}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Z}_B напрямлені протилежно, вказаним на рисунку 4.26.

Приклад 2

На горизонтальний вал (рис.4.27), встановлений у підшипниках A і B , діє вантаж вагою $Q = 25H$, прив'язаний тросом до шківа з радіусом $r = 0,2 м$. Вантаж вагою $P = 100H$, насаджений на стрижень ED , незмінно з'єднаний з валом AB під прямим кутом.

Дано: $AC = 0,2 м$, $CD = 0,7 м$, $BD = 0,1 м$. У стані рівноваги стрижень ED відхилений від вертикалі на кут 30° .

Знайти: відстань l центра ваги вантажу вагою P від осі вала AB , а також реакції підшипників A і B .

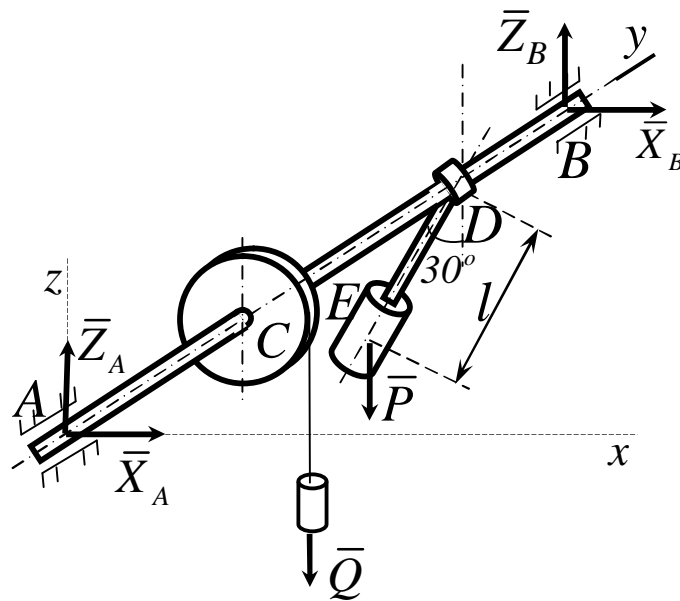


Рисунок 4.27

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вала, на який діють активні сили \bar{P} і \bar{Q} . В'язами для нього є підшипники A і B .

Згідно з аксіомою про в'язі, звільняємо вал від в'язей і замінюємо їх реакціями \bar{R}_A і \bar{R}_B , що лежать у площинах, перпендикулярних до осі підшипників A і B .

Візьмемо систему координат, як показано на рис. 4.27. Невідомі реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B подамо складовими $\bar{X}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$ (див.рис.4.27), які треба визначити.

Для розв'язання задачі скористаємося умовами рівноваги (4.23). У цьому разі друга умова виконується тотожно, оскільки проекції всіх сил, у тому числі й реакцій в'язей, на вісь y дорівнюють нулю.

З п'яти умов рівноваги, що залишилися, слід визначити п'ять невідомих величин X_A, Z_A, X_B, Z_B, l - задача статично визначена.

Щодо заданої задачі, умови рівноваги (4.23) мають вигляд:

$$\sum_i F_{ix} = X_A + X_B = 0,$$

$$\sum_i F_{iz} = Z_A + Z_B - P - Q = 0,$$

$$\sum_i m_x(\bar{F}_i) = -Q \cdot AC - P \cdot AD + Z_B \cdot AB = 0,$$

$$\sum_i m_y(\bar{F}_i) = -P \cdot l \sin 30^\circ + Qr = 0,$$

$$\sum_i m_z(\bar{F}_i) = -X_B \cdot AB = 0.$$

Звідки: $X_A = X_B = 0;$

$$l = \frac{Q \cdot r}{P \cdot \sin 30^\circ} = \frac{20 \cdot 0,2}{100 \cdot 0,5} = 0,1_{(м)};$$

$$Z_B = \frac{1}{AB} (Q \cdot AC + P \cdot AD) = 25 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,9 = 95_{(H)}.$$

$$Z_A = P + Q - Z_B = 100 + 25 - 95 = 30_{(H)}.$$

Відповідь: $X_A = 0; X_B = 0; Z_A = 30H; Z_B = 95H; l = 0,1м.$

4.1.4 ЗАДАЧА С4. Визначення реакцій опор твердого тіла

4.1.4.1 Умова задачі

Жорстка конструкція, власною вагою якої нехтують, складається з трьох плит, з'єднаних (зварених) між собою під прямими кутами одна до одної.

В точці А конструкція спирається на сферичний шарнір, а в точці В – на підшипник (циліндричний шарнір).

Для утримання конструкції в заданому положенні в точці С установлений невагомий стрижень CC' , який має на своїх кінцях шарніри. Розміри плит указані на рисунках.

Кожна із плит розташована паралельно до однієї з координатних площин. На конструкцію діють три сили. Значення цих сил, їхній напрямок і точки прикладення указані в таблиці 4.8. При цьому сили \bar{F}_1 і \bar{F}_4 паралельні до координатної площини XU , сила \bar{F}_2 – паралельна координатній площині XZ , а сила \bar{F}_3 – площині YZ .

Точки прикладення сил (D, E, H, K) знаходяться у кутах або на серединах сторін плит.

Визначити складові реакції шарового шарніра А, підшипника В і зусилля, яке сприймає стрижень CC' . При розрахунках взяти $a = 0,6\text{ м}$.

ВКАЗІВКА. Задача С4 – на рівновагу тіла, яке знаходиться під дією просторової системи довільно розташованих сил.

При її рішенні треба урахувати, що реакція сферичного шарніра А має три складові (за трьома координатними осями), а реакція підшипника В (циліндричного шарніра) – дві складові, які лежать у площині, перпендикулярній до осі підшипника.

Для визначення шуканих величин потрібно скласти шість рівнянь рівноваги.

Таблиця 4.8

Сили	\vec{F}_1		\vec{F}_2		\vec{F}_3		\vec{F}_4	
		α_1		α_2		α_3		α_4
Номер умови	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	Точка дії сил	$a_1, \text{ град}$	Точка дії сил	$a_2, \text{ град}$	Точка дії сил	$a_3, \text{ град}$	Точка дії сил	$a_4, \text{ град}$
0	D	0	K	30	E	60		
1			D	0	K	30	E	60
2	E	60	D	30	H	0		
3			E	60	D	30	H	0
4	H	30	K	0	E	60		
5			H	30	K	0	D	30
6	K	0	E	60	H	30		
7			H	0	D	60	K	30
8	D	60	E	30	K	0		
9			K	60	E	30	H	0

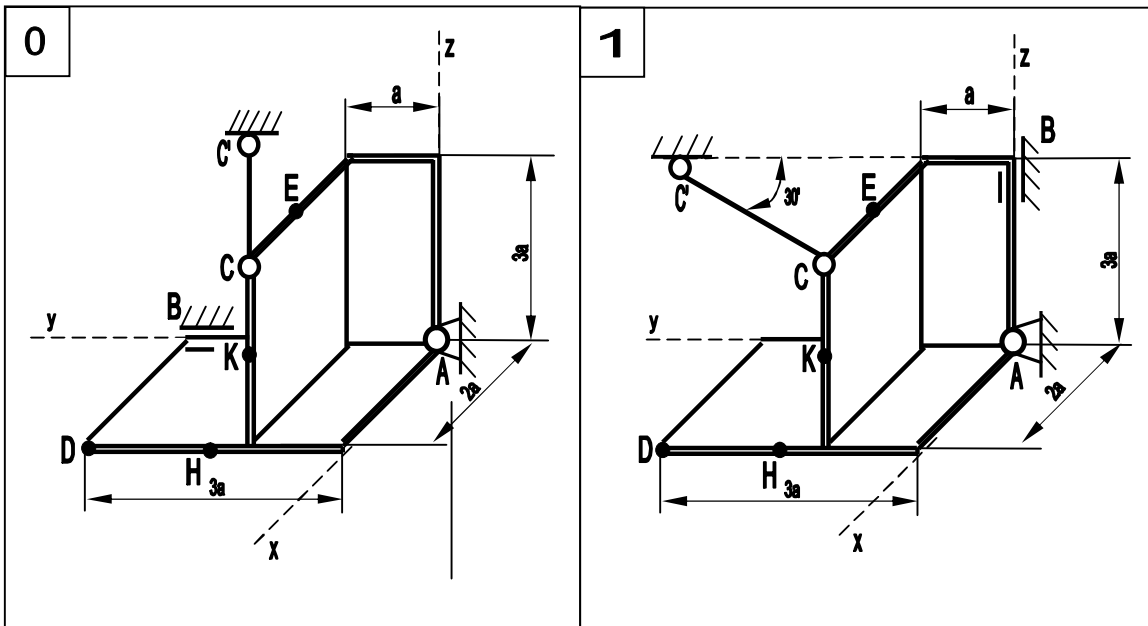


Рисунок 4.28

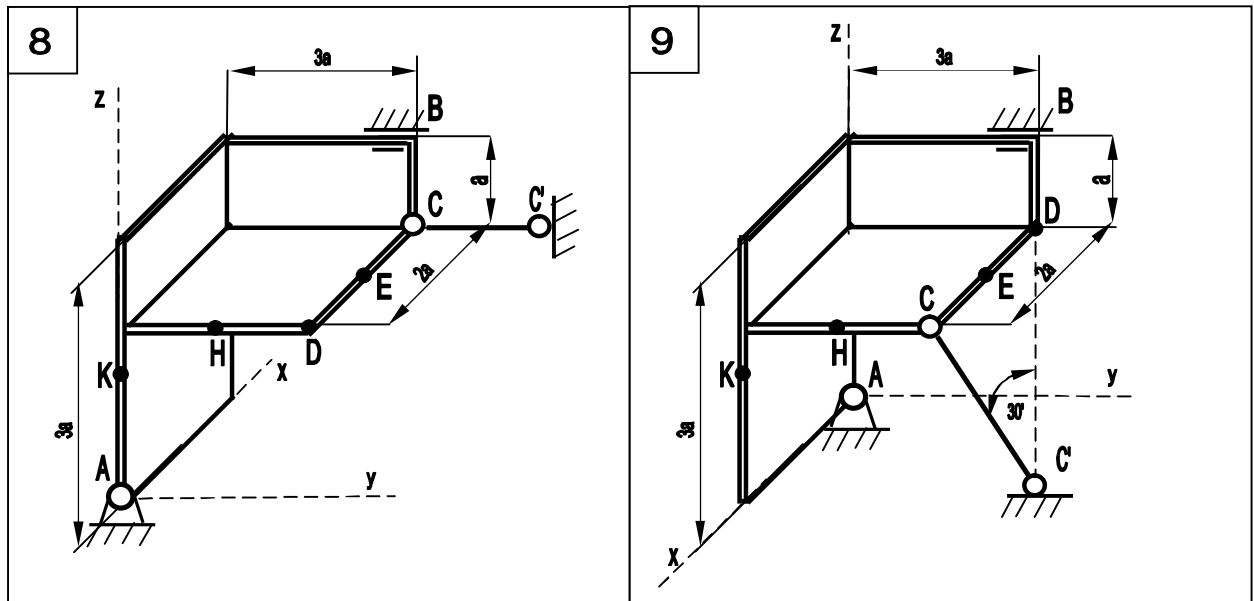


Рисунок 4.28, аркуш 3

4.1.4.2 Приклади розв'язання задачі С4

Приклад 1

Тіло являє собою дві плоских плити жорстко з'єднаних між собою під прямим кутом.

Більша за розмірами плита тіла розташована у горизонтальній площині і має вагу $P_1 = 5\text{кН}$, менша плита розташована у вертикальній площині xAz , її вага складає $P_2 = 3\text{кН}$. Вертикальна плита тіла в точці А спирається на сферичний шарнір, а в точці В – на підшипник.

Нерухомість тіла забезпечує стрижень 1, який являється опорою горизонтальній плиті. У площині більшої плити діє пара сил M . До тіла в точках К і D прикладені дві зосереджені сили, відповідно \vec{F}_1 і \vec{F}_3 .

Дано: $P_1 = 5\text{кН}$, $P_2 = 3\text{кН}$, $M = 4\text{кН}\cdot\text{м}$, $F_1 = 6\text{кН}$, $F_3 = 10\text{кН}$.

Знайти: реакцію сферичного шарніра і підшипника, а також зусилля, яке стримує стрижень.

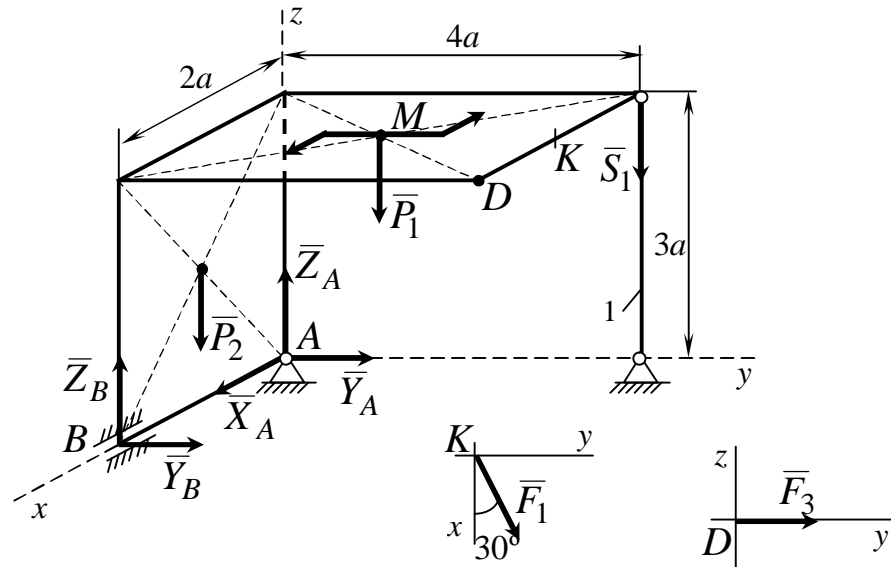


Рисунок 4.29

Розв'язання

1 Розглянемо рівновагу тіла. Дію на тіло в'язей замінимо відповідними реакціями в'язей. Реакцію сферичного шарніра A представляємо трьома складовими: \bar{X}_A , \bar{Y}_A і \bar{Z}_A ; підшипника B – \bar{X}_B , \bar{Z}_B ; а стрижня 1 – \bar{S}_1 .

Задані сили разом з реакціями в'язей утворюють просторову систему довільно розташованих сил.

2 Складаємо шість рівнянь рівноваги для утвореної системи і, розв'язуючи їх, знаходимо усі невідомі.

- (1) $\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + F_1 \cdot \cos 30^\circ = 0;$
- (2) $\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_3 + F_1 \cdot \sin 30^\circ = 0;$
- (3) $\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P_1 - P_2 - S_1 = 0;$
- (4) $\sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad -S_1 \cdot 4a - P_1 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a - F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3a = 0;$
- (5) $\sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad -Z_B \cdot 2a + (P_1 + P_2) \cdot a + F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3a = 0;$
- (6) $\sum m_z(\bar{F}_k) = 0, \quad Y_B \cdot 2a + F_3 \cdot 2a - F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a +$
 $+ F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot a + M = 0.$

Рівняння (1), (4), (5) і (6) мають по одній невідомій. Знаходимо їх з цих рівнянь.

$$X_A = -F_1 \cdot \cos 30^\circ = -6 \cdot 0,866 = -5,2 (\text{кН});$$

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{P_1 \cdot 2a + F_3 \cdot 3a + F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3a}{4a} = \\ &= -\frac{5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 0,5 \cdot 3}{4} = -12,5 (\text{кН}); \end{aligned}$$

$$Z_B = \frac{(P_1 + P_2) \cdot a + F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3a}{2a} = \frac{(5 + 3) + 6 \cdot 0,866 \cdot 3}{2} = 11,8 (\text{кН});$$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a - F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot a - M - F_3 \cdot 2a}{2a} = \\ &= \frac{6 \cdot 0,866 \cdot 4 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 - 4 - 10 \cdot 2 \cdot 0,6}{2 \cdot 0,6} = -4,44 (\text{кН}). \end{aligned}$$

З урахуванням знайдених значень X_A , S_1 , Z_B і Y_B можна розв'язати рівняння (2) і (3) і знайти усі шукані реакції.

$$Y_A = -(Y_B + F_3 + F_1 \cdot \sin 30^\circ) = -(10 + 6 \cdot 0,5 - 4,44) = -8,56 (\text{кН});$$

$$Z_A = P_1 + P_2 + S_1 - Z_B = 5 + 3 + (-12,5) - 11,8 = -16,3 (\text{кН}).$$

Відповідь: $X_A = -5,2 \text{кН}$; $Y_A = -8,56 \text{кН}$; $Z_A = -16,3 \text{кН}$;
 $Y_B = -4,44 \text{кН}$; $Z_B = 11,8 \text{кН}$; $S_1 = -12,5 \text{кН}$.

Приклад 2

На відміну від умови прикладу 1, у даній задачі пара сил M діє в площині меншої плити тіла.

Відрізняються за величиною, напрямком і точками прикладення задані зосереджені сили \bar{F}_2 і \bar{F}_3 .

Напрямок векторів цих сил відносно заданої системи координат показаний на рисунку 4.30.

В іншому, постановка задачі повністю аналогічна умові прикладу 1.

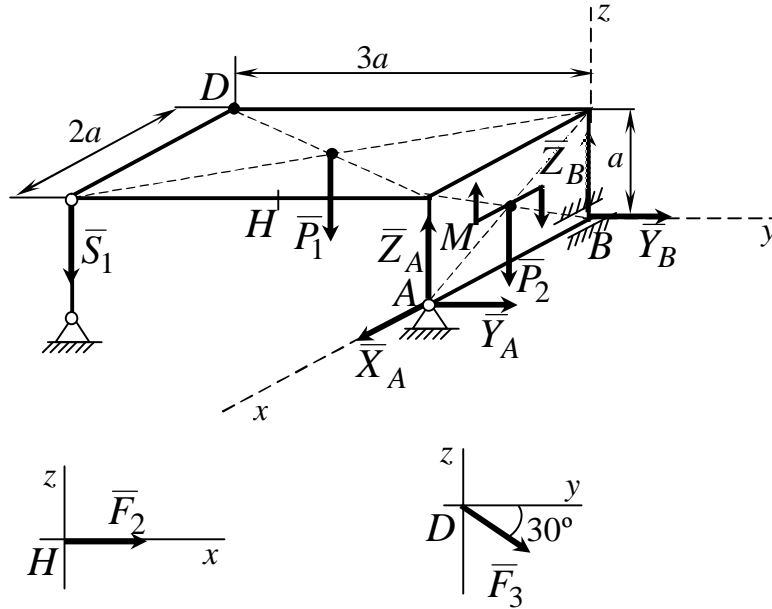


Рисунок 4.30

Розв'язання

1 Розглянемо рівновагу тіла. Дію на тіло в'язей замінимо відповідними реакціями в'язей. Реакцію сферичного шарніра A представляємо трьома складовими: \bar{X}_A , \bar{Y}_A і \bar{Z}_A ; підшипника B – \bar{X}_B , \bar{Z}_B ; а стрижня 1 – \bar{S}_1 .

Задані сили разом з реакціями в'язей утворюють просторову систему довільно розташованих сил.

2 Складаємо шість рівнянь рівноваги для утвореної системи і, розв'язуючи їх, знаходимо усі невідомі.

$$(1) \quad \sum F_{kx} = 0, \quad X_A - F_2 = 0;$$

$$(2) \quad \sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_3 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$(3) \quad \sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - S_1 - P_1 - P_2 - F_3 \cdot \sin 30^\circ = 0;$$

$$(4) \quad \sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad S_1 \cdot 3a + P_1 \cdot 1,5a + F_3 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3a - \\ - F_3 \cdot \cos 30^\circ \cdot a = 0;$$

$$(5) \quad \sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad -Z_A \cdot 2a + S_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + P_2 \cdot a - M - F_2 \cdot a = 0;$$

$$(6) \quad \sum m_z(\bar{F}_k) = 0, \quad Y_A \cdot 2a + F_2 \cdot 1,5a = 0.$$

Із рівняння (1) знаходимо X_A :

$$X_A = F_2 = 8(\text{кН});$$

Із рівняння (4) знаходимо S_1 :

$$S_1 = \frac{F_3 \cdot \cos 30^\circ \cdot a - P_1 \cdot 1,5a - F_3 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3a}{3a} =$$

$$= \frac{10 \cdot 0,866 - 5 \cdot 1,5 - 10 \cdot 0,5 \cdot 3}{3} = -13,84(\text{кН});$$

$$S_1 = -13,84(\text{кН});$$

Із рівняння (5) знаходимо Z_A :

$$Z_A = \frac{S_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + P_2 \cdot a - F_2 \cdot a - M}{2a} =$$

$$= \frac{(-13,84) \cdot 2 + 5 + 3 - 8 - 4/0,6}{2} = -34,3(\text{кН});$$

$$Z_A = -34,3(\text{кН});$$

Із рівняння (6) знаходимо Y_A :

$$Y_A = \frac{-F_2 \cdot 1,5a}{2a} = \frac{-8 \cdot 1,5}{2} = -6(\text{кН}).$$

Із рівнянь (2) і (3) знаходимо реакції Y_B і Z_B :

$$Y_B = -F_3 \cdot \cos 30^\circ - Y_A = -10 \cdot 0,866 + 6 = -2,66(\text{кН});$$

$$Z_B = S_1 + P_1 + P_2 + F_3 \cdot \sin 30^\circ - Z_A = -13,84 + 5 + 3 + 10 \cdot 0,5 - (-34,3)$$

$$Z_B = 33,46 \text{ кН}$$

Відповідь: $X_A = 8 \text{ кН}; \quad Y_A = 6 \text{ кН}; \quad Z_A = -34,3 \text{ кН};$
 $Z_B = 33,46 \text{ кН}; \quad Y_B = -2,66 \text{ кН}; \quad S_1 = -13,84 \text{ кН}.$

4.2 Кінематика

4.2.1 ЗАДАЧА К1. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху

4.2.1.1 Стислі відомості з теорії кінематики точки

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних точок та їх систем з геометричної точки зору незалежно від сил, що діють на них.

Кінематику називають також геометрією руху, оскільки в ній розглядаються саме геометричні властивості руху. Вона вивчає залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Механічні рухи, що вивчаються у кінематиці, відбуваються у просторі та в часі.

Зазначимо, що в теоретичній механіці простір, в якому відбувається рух тіла, розглядається як тривимірний, і всі розрахунки виконуються на підставі методів евклідової геометрії.

Час вважається однорідним у будь-яких системах відліку (системах координат) і не залежить від відносного руху цих систем. Час позначається буквою t і розглядається як безперервно змінна величина, що застосовується як аргумент.

У кінематиці при зміні часу розрізняють такі поняття, як проміжок часу та початковий момент часу.

Проміжком часу називають перебіг часу між двома фізичними явищами.

Моментом часу називають межу між двома суміжними проміжками часу.

Початковим моментом часу називають момент часу, з якого починається відлік.

Вивчаючи рух тіла, завжди слід знати, відносно якого іншого тіла, що називається **тілом відліку**, розглядається цей рух.

Сукупність тіла відліку, з яким пов'язана система координат, і годинника називають **системою відліку**. Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

У кінематиці не має значення, який рух здійснює вибрана система координат відносно інших тіл, що не входять до меж розв'язуваної задачі, проте завжди слід звертати увагу на те, що характер спостережного руху значною мірою залежить від вибору системи координат.

Наприклад, поршень двигуна внутрішнього згорання здійснює відносно корпусу автомобіля прямолінійний коливальний рух, а відносно дороги, якою рухається автомобіль зі сталою швидкістю, – синусоїдальний.

У класичній механіці постулюється наявність системи відліку, відносно якої простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним.

Систему відліку називають **інерціальною**, якщо ізольована матеріальна точка у такій системі може необмежено довго знаходитись у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.

Системи відліку, що не мають вказаних властивостей, називають **неінерціальними**. Усі системи відліку, що знаходяться у стані спокою або рухаються поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної системи, є також інерціальними.

Рух геометричного образу тіла у відношенні до вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення відносно цієї системи у довільний момент часу.

Залежність параметрів, що характеризуються положенням геометричного образу відносно системи відліку від часу, визначається відповідними рівняннями, які називаються **законом руху** тіла.

Оскільки рух геометричного образу тіла буде відомим, коли буде відомим закон руху всіх його точок, вивчення руху будь-якого геометричного образу передуює вивченню руху однієї його точки.

Ця логіка є основою поділу кінематики на такі розділи, як кінематика точки, кінематика твердого тіла, та кінематика сукупності твердих тіл і точок.

Три способи завдання руху точки

Основним завданням кінематики точки є вивчення залежності між довільними положеннями рухомої точки у просторі та часі. Ця залежність визначає **закон руху** точки.

Закон руху точки вважається відомим, якщо можна визначити положення точки у просторі у довільний момент часу. Для визначення положення точки у просторі вибирають деяку систему відліку (систему координат).

Лінія, яку описує точка під час руху, називається **траєкторією**. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки називається **прямолінійним**, якщо траєкторія точки крива, то – **криволінійним**.

Рух точки відносно обраної системи відліку вважається заданим, якщо відомо, яким чином можна визначити її положення у будь-який момент часу. Основними просторово-часовими (кінематичними) характеристиками руху точки є її **координата, швидкість і прискорення**.

Рух точки можна визначити трьома способами: векторним, координатним і натуральним.

Векторний спосіб

Положення матеріальної точки можна визначити за допомогою радіус-вектора \vec{r} (рис.4.31), тобто вектора, проведеного з початку координат O у дану точку M .

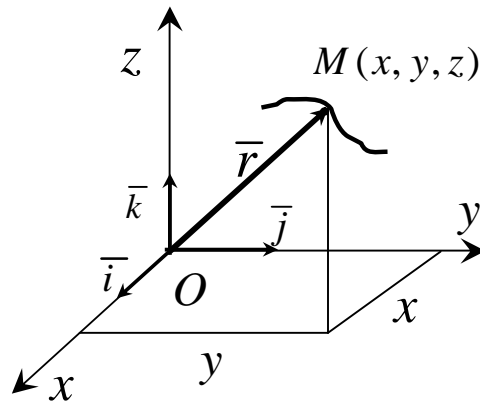


Рисунок 4.31

Одночасно з рухом точки радіус-вектор \bar{r} змінюється за величиною і напрямком. Кожному моменту часу t відповідає певне значення \bar{r} . Отже, \bar{r} є функцією часу t , тобто

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \quad (4.24)$$

Функцію (4.24) вважають однозначною, тому що розглянута точка у даний момент часу може знаходитись лише в одному місці простору. Крім того, функція (4.24) має бути безперервною функцією. У більшості задач механіки ця функція має першу та другу похідні за часом. Рівняння (4.24) називається **кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі**. Це рівняння є законом руху точки, а також рівнянням траєкторії точки у векторній формі.

Координатний спосіб

Цей спосіб визначення руху точки полягає в тому, що задаються координати точки як функції часу (див.рис.4.31):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (4.25)$$

Між векторним і координатним способами завдання руху точки існує такий зв'язок:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (4.26)$$

де \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} – орти (одичні вектори), осів координат Ox , Oy , Oz відповідно (див.рис.4.31).

На тій самій підставі, що й функція (4.24), функції (4.25) однозначні, неперервні та мають неперервні похідні.

Рівняння (4.25) є також рівняннями траєкторії точки у параметричній формі. Виключивши з рівнянь (4.25) параметр t , одержимо рівняння траєкторії в явній формі.

Зазначимо, що крім декартової системи координат можуть застосовуватись й інші – криволінійні системи координат, зокрема полярні, циліндричні, сферичні, тощо.

Натуральний спосіб

Якщо траєкторія точки відома наперед, то для визначення закону її руху у просторі достатньо задати положення точки на траєкторії. Тому одну з точок M_0 на траєкторії беруть за початок відліку криволінійних координат, оскільки положення рухомої точки M визначається її відстанню S , яка відлічується вздовж траєкторії від вибраної точки відліку (рис.4.32).

Отже, S є функцією часу

$$s = s(t). \quad (4.27)$$

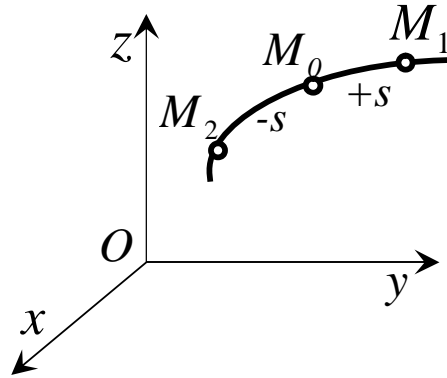


Рисунок 4.32

Наведене рівняння (4.27) визначає закон руху точки траєкторією. Функція (4.27) має бути однозначною, неперервною та диференційованою.

Зауважимо, що криволінійна координата точки S у загальному випадку відрізняється від шляху, який пройшла точка траєкторією.

Швидкість точки у прямокутній системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то швидкість точки визначається за її проекціями на вісі координат.

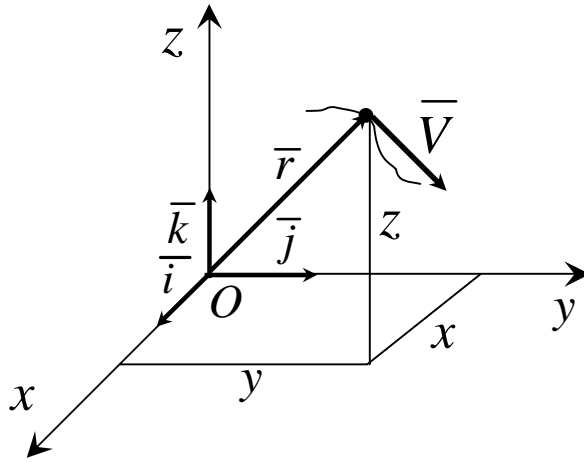


Рисунок 4.33

Дійсно, розклавши вектор швидкості та радіус-вектор за ортами координатних осей (рис.4.33), одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ \bar{V} &= V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}, \end{aligned} \right] \quad (4.28)$$

де x, y, z – координати рухомої точки;

V_x, V_y, V_z – проєкції швидкостей на осі координат.

За визначенням швидкості відповідно до формули

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (4.29)$$

маємо:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (4.30)$$

Підставивши до формули (4.30) значення \bar{V} із формули (4.28), одержимо:

$$V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}, \quad (4.31)$$

звідки

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \& V_y = \frac{dy}{dt} = \& V_z = \frac{dz}{dt} = \& \quad (4.32)$$

Отже, проекції швидкості на вісі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат точки.

Модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (4.33)$$

або

$$V = \sqrt{\& + \& + \&} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (4.34)$$

Напрямок швидкості знаходиться за напрямними косинусами:

$$\cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{V}, \cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{V}, \cos(\bar{V}, \bar{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (4.35)$$

Стале і змінне прискорення у прямокутній системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом, тобто рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то, розклавши вектори \bar{r} , \bar{V} та \bar{a} за ортами координатних осей, маємо:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ \bar{V} &= V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}, \\ \bar{a} &= a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \end{aligned} \right] \quad (4.36)$$

де a_x , a_y , a_z – проєкції прискорення на осі координат.

На підставі

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \mathbb{R} \quad (4.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \frac{dV_x}{dt}\bar{i} + \frac{dV_y}{dt}\bar{j} + \frac{dV_z}{dt}\bar{k} = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \mathbb{R} + \mathbb{R} + \mathbb{R}, \end{aligned} \right] \quad (4.38)$$

звідки

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \mathbb{R} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \mathbb{R} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \mathbb{R} \end{aligned} \right] \quad (4.39)$$

Отже, проекції прискорення на нерухомі осі координат дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості за часом на ті самі осі або другим похідним відповідних координат рухомої точки за часом.

Модуль прискорення та його напрямні косинуси запишемо у вигляді

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\frac{dV_x}{dt}^2 + \frac{dV_y}{dt}^2 + \frac{dV_z}{dt}^2} = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}; \quad (4.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{a}, \bar{i}) &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos(\bar{a}, \bar{j}) &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos(\bar{a}, \bar{k}) &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Із рівняння (4.37) можна зробити висновок, що коли друга похідна від функції \bar{r} дорівнює константі, то прискорення точки буде сталим.

У протилежному випадку прискорення точки буде змінним.

Рівняння руху і швидкість точки при натуральному способі завдання руху

Як уже зазначалося, рух точки є заданим у натуральній формі, якщо відомі її траєкторія та закон руху за траєкторією $s = s(t)$ (рис. 4.34).

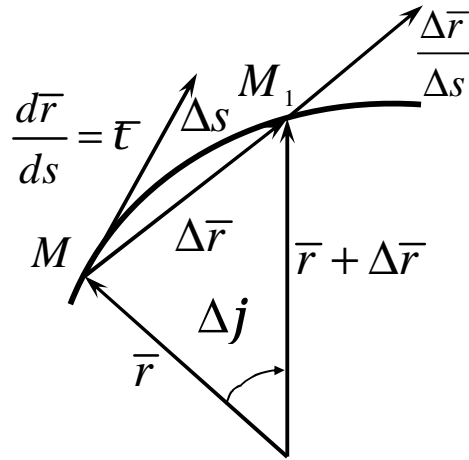


Рисунок 4.34

Кожній точці траєкторії відповідає певний радіус-вектор \bar{r} (рис. 4.34), який можна розглядати як складну функцію часу

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{r}(s(t)).$$

Тому формулу для швидкості подамо у вигляді

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}(s(t))}{dt} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (4.42)$$

Розглянемо вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$.

Оскільки $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1$, то модуль $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$.

Вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$ (рис. 4.34) напрямлений за січною MM_1 , граничне положення якої є дотичною до траєкторій досліджуваної точки.

Отже,

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t} . \quad (4.43)$$

З урахуванням (4.43) одержимо наступний вираз для швидкості при натуральному способі задання руху точки:

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{t} = \dot{s} \bar{t} . \quad (4.44)$$

Дотичне і нормальне прискорення точки. Прискорення точки при натуральному способі завдання руху

Відомо (4.44), що швидкість точки при натуральному способі задання руху має вигляд

$$\bar{V} = \dot{s} \bar{t} ,$$

отже, прискорення отримаємо як:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{s} \bar{t}) = \ddot{s} \bar{t} + \dot{s} \frac{d\bar{t}}{dt} , \quad (4.45)$$

де $\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{r} \bar{n}$ як похідна вектора одиничного модуля.

Тому формула (4.45) набуває такого вигляду:

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{t} + \frac{V^2}{r} \bar{n} , \quad (4.46)$$

де $V = \|\vec{v}\|$.

Таким чином ми розподілили прискорення точки за осями натурального тригранника.

Частина прискорення

$$\vec{a}_t = \frac{dV}{dt} \vec{t} \quad (4.47)$$

називається *дотичною* складовою прискорення.

Друга частина прискорення

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{r} \vec{n} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{r} \vec{n} \quad (4.48)$$

називається *нормальною* складовою прискорення. Вона спрямована у середину увігнутості траєкторії, тобто до центру її кривизни.

Таким чином, прискорення точки

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (4.49)$$

Із (4.45) отримуємо формули для проєкцій на натуральні вісі.

$$a_t = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{r}, a_b = 0. \quad (4.50)$$

Проєкція прискорення на позитивний напрямок дотичної, який співпадає з напрямком одиничного вектора \vec{t} , називається *дотичним прискоренням*, а на головну нормаль, спрямовану за одиничним вектором \vec{n} , – *нормальним прискоренням*. Проєкція прискорення на бінормаль, дорівнює нулю.

Враховуючи ортогональність \vec{a}_t і \vec{a}_n відповідно (4.49) і рис. 4.35 маємо:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = |a_t| / a_n. \quad (4.51)$$

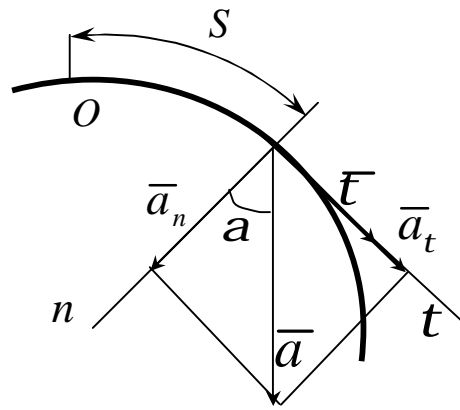


Рисунок 4.35

Якщо рух точки задано в координатній формі, то

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V} \quad (4.52)$$

Радіус кривизни траєкторії

$$r = \frac{V^2}{a_n}, \quad (4.53)$$

де
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

ВКАЗІВКА 1. Задача К1 відноситься до кінематики точки та розв'язується за допомогою формул за якими визначається швидкість та прискорення точки у декартових координатах (координатний спосіб завдання руху точки), а також формул, за якими визначається швидкість, дотичне та нормальне прискорення точки при натуральному способі завдання її руху.

ВКАЗІВКА 2. При роботі над виконанням задачі необхідно мати відомі з аналітичної геометрії знання, а саме:

Найпростіші функції та їх графіки

Пряма лінія.

Будь-яку пряму, яка не паралельна до осі ординат, можна подати рівнянням виду

$$y = kx + b.$$

У цьому рівнянні k є тангенс кута a (рис.4.36), а число b дорівнює довжині відрізка ОК, який відсікається прямою на осі ординат.

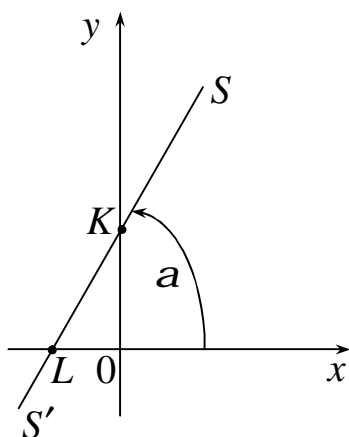


Рисунок 4.36

Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$.

Величину k називають кутовим коефіцієнтом, величину b - початковою ординатою.

Приклад 1. Написати рівняння прямої (рис.4.37), яка утворює з віссю Ox кут $a = -45^\circ$ і відсікає початкову ординату $b = -3$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$.

Шукане рівняння $y = -x - 3$.

Приклад 2. Яку лінію являє рівняння $3x = \sqrt{3}y$?

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння до виду $y = \frac{3}{\sqrt{3}}x$

або $y = \sqrt{3}x$. Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tga} = \sqrt{3}$, $a = 60^\circ$.

Початкова ордината $b = 0$. Задане рівняння являє собою пряму UV (рис.4.38), яка проходить через початок координат під кутом $a = 60^\circ$ до осі Ox .

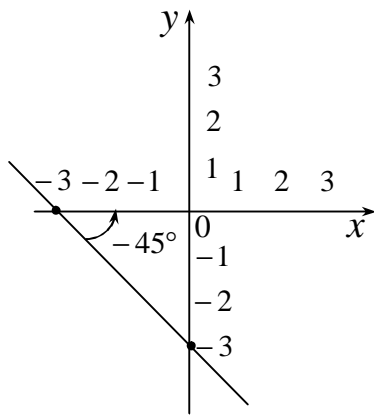


Рисунок 4.37

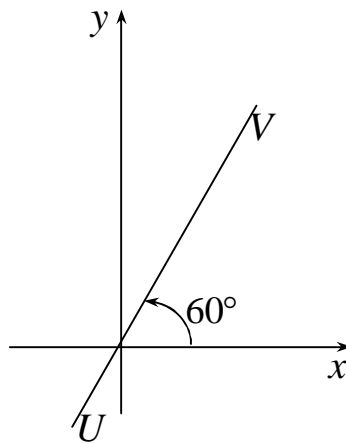


Рисунок 4.38

Коло

Коло радіуса R з центром в початку координат являє собою рівняння виду $x^2 + y^2 = R^2$.

Коло радіуса R з центром у точці $C(a; b)$ (рис.4.39) являє собою рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

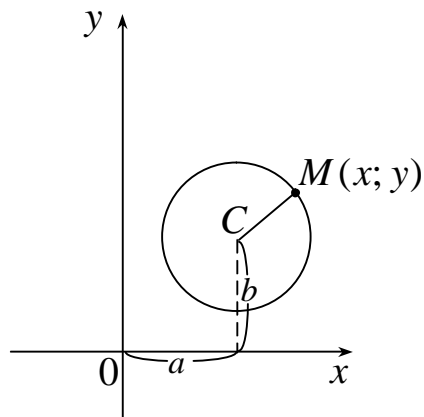


Рисунок 4.39

Еліпс

Рівняння виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається **канонічним рівнянням еліпса**.

Величина $2a$ (рис.4.40) називається великою віссю еліпса; величина b називається малою піввіссю еліпса.

Точка C називається центром еліпса.

Рівняння еліпса з центром в точці $C(c_1; c_2)$ має вид (рис.4.40)

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} + \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1$$

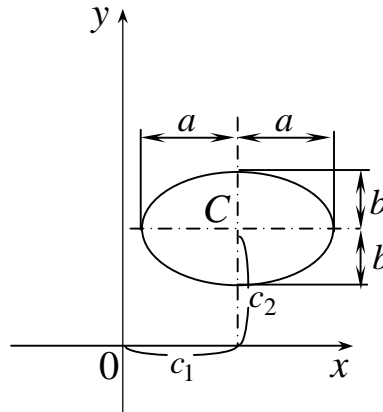


Рисунок 4.40

Парабола

Функція $y = ax^2 + bx + c$ (a , b і c – сталі величини; $a \neq 0$) називається квадратичною.

У найпростішому випадку $y = ax^2$ ($b = c = 0$) графік являє собою криву лінію, яка проходить через початок координат.

Графік функції $y = ax^2$ є парабола.

Кожна парабола має вісь симетрії, яка називається віссю параболі. Точка O перетину параболі з її віссю називається вершиною параболі.

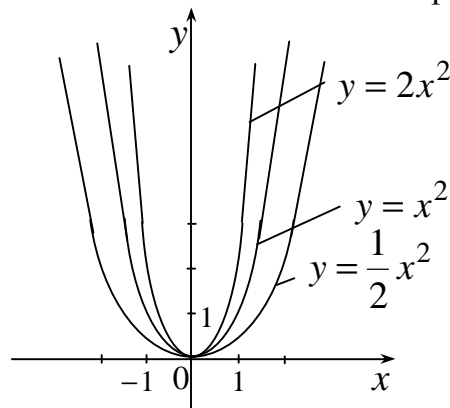


Рисунок 4.41

Питання для самоперевірки

- 1 Що Називають траєкторією руху точки?
- 2 Як задається рух точки векторним способом?
- 3 Як задається рух точки координатним способом?
- 4 Як задається рух точки натуральним способом?
- 5 Як визначається швидкість точки при векторному, координатному і натуральному способах задання руху?

6 Як визначається прискорення точки при векторному і координатному способах задання руху?

7 Як визначається дотичне і нормальне прискорення точки?

8 Як називаються осі натурального тригранника?

4.2.1.2 Умова задачі

Точка B рухається у площині xu (рис. 4.42 (аркуш 1...2), табл. 4.9; траєкторія точки на рисунках показана умовно).

Закон руху точки заданий рівнянням: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, де x та y виражені у сантиметрах, t – у секундах.

За заданими рівняннями руху точки B встановити вид її траєкторії та для моменту часу $t = t_1(c)$ знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Залежність $x = f_1(t)$ вказана безпосередньо на рисунках 4.42, а залежність $y = f_2(t)$ задана в таблиці 4.9.

Таблиця 4.9

Номер умови	$y = f_2(t)$			
	Рис. 0	Рис. 1...3	Рис. 4...6	Рис. 7...9
0	$y = 8 - 10t^2 + \frac{10}{3}t$	$y = 6\sin\left(\frac{p}{6}t\right)$	$y = 4\sin\left(\frac{p}{6}t\right) - 2$	$y = 3\cos\left(\frac{p}{6}t\right)$
1	$y = 4 - 5t^2 + \frac{5}{3}t$	$y = 6\sin\left(\frac{p}{6}t\right) + 2$	$y = 4t^2 + 2$	$y = 3\sin\left(\frac{p}{3}t\right)$
2	$y = 2 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{5}{6}t$	$y = 6\sin\left(\frac{p}{6}t\right) - 3$	$y = 2t^3$	$y = 4\cos^2\left(\frac{p}{6}t\right)$
3	$y = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t^2 + \frac{5}{9}t$	$y = 6\cos\left(\frac{p}{6}t\right)$	$y = 4\cos\left(\frac{p}{6}t\right) + 2$	$y = 5\cos\left(\frac{p}{6}t\right)$
4	$y = -\frac{39}{5} + 10t^2 - \frac{10}{3}t$	$y = 6\cos\left(\frac{p}{6}t\right) + 2$	$y = 2(1 - t^2)$	$y = -9\cos^2\left(\frac{p}{6}t\right)$
5	$y = -\frac{18}{5} + 5t^2 - \frac{5}{3}t$	$y = 6\cos\left(\frac{p}{6}t\right) - 3$	$y = 2 - t^3$	$y = 5\cos\left(\frac{p}{6}t\right) + 3$
6	$y = -\frac{7}{5} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{6}t$	$y = \cos\left(\frac{p}{3}t\right)$	$y = 8\sin\left(\frac{p}{4}t\right)$	$y = 5\cos\left(\frac{p}{6}t\right) - 4$
7	$y = -\frac{23}{15} + \frac{5}{3}t^2 - \frac{5}{9}t$	$y = -3\sin\left(\frac{p}{6}t\right)$	$y = (t + 2)^2$	$y = -9\sin\left(\frac{p}{3}t\right)$
8	$y = -\frac{8}{5} - \frac{5}{4}t^2 + \frac{5}{12}t$	$y = -3\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right) - 3$	$y = 8\cos\left(\frac{p}{4}t\right)$	$y = 3\sin\left(\frac{p}{6}t\right) + 3$
9	$y = -\frac{8}{5} - t^2 + \frac{1}{3}t$	$y = 6\sin^2\left(\frac{p}{6}t\right)$	$y = (t + 1)^3$	$y = 9\sin\left(\frac{p}{6}t\right) - 3$

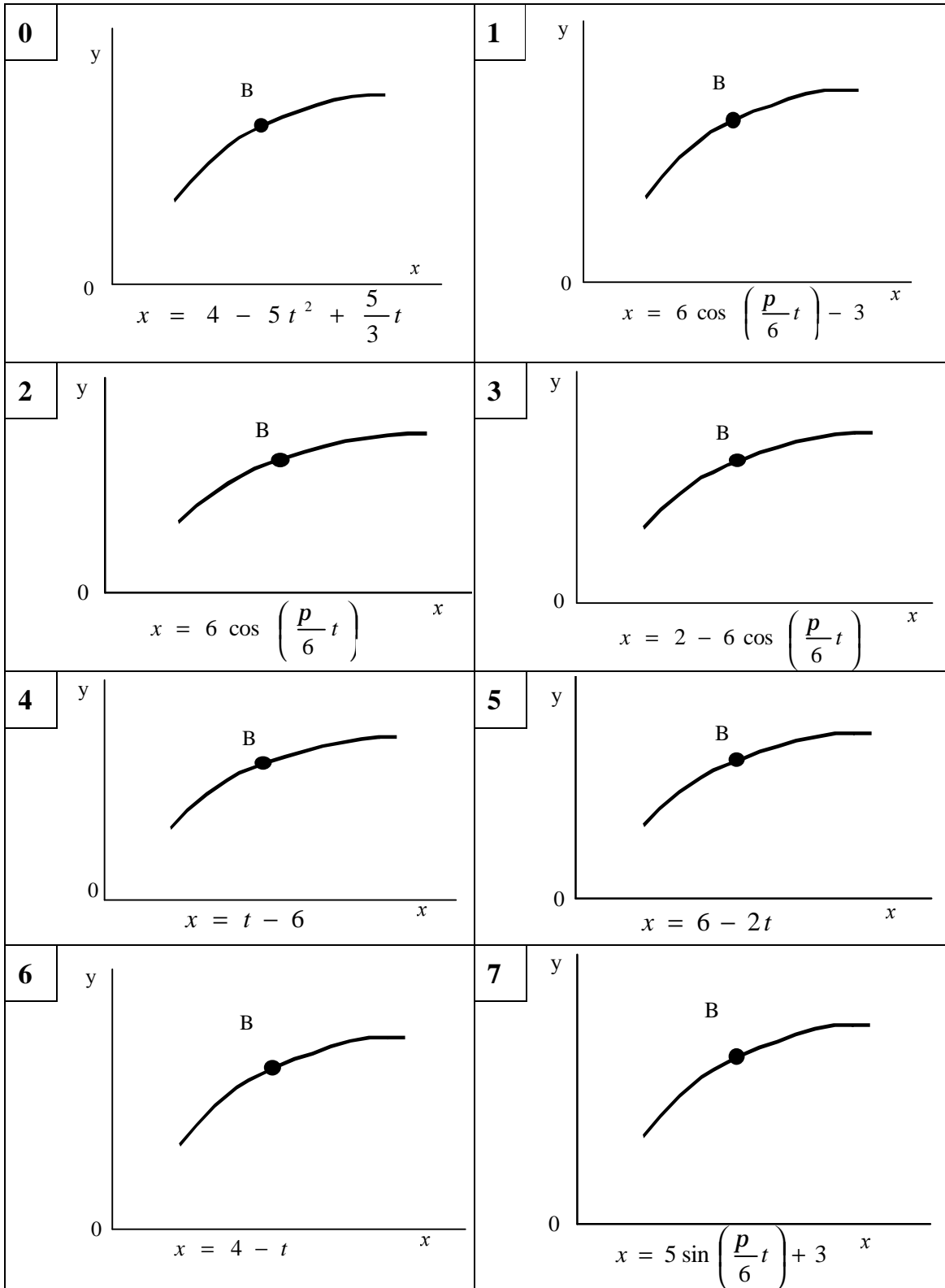


Рисунок 4.42

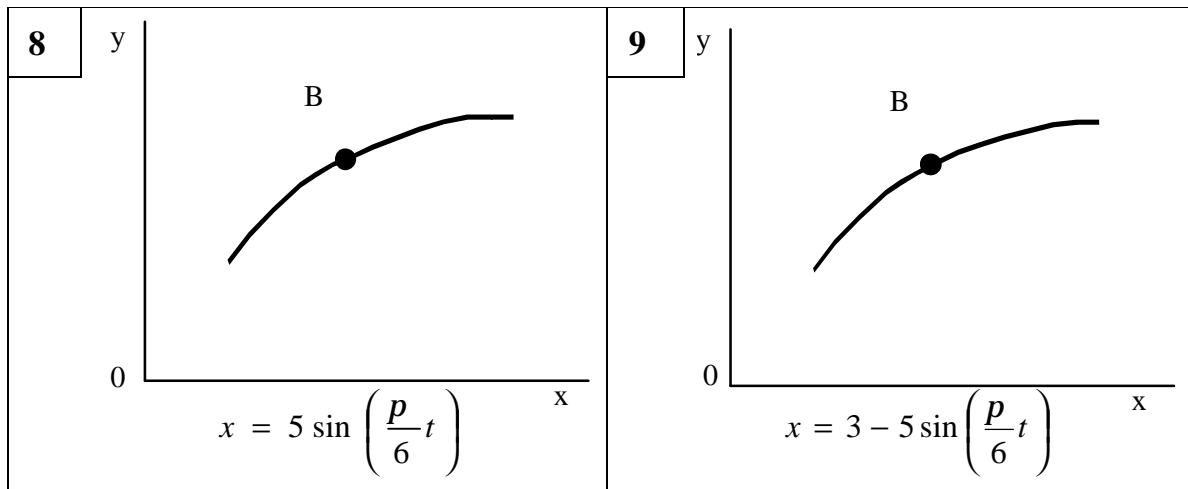


Рисунок 4.42, аркуш 2

4.2.1.3 Приклади розв'язання задачі К1

Приклад 1

Дано: точка рухається у площині $xу$, закон руху заданий рівняннями:

$$x = t - 4 \text{ (см);} \quad (1)$$

$$y = 2t^3 \text{ (см).} \quad (2)$$

Знайти: рівняння траєкторії точки, для моменту часу $t_1 = 1 \text{ (с)}$ визначити швидкість та прискорення точки, її дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання

1 Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо з заданих рівнянь руху час t . З рівняння (1) $t = (x + 4)$, підставивши значення t в рівняння (2), отримаємо:

$$y = 2(x + 4)^3. \quad (3)$$

Рівняння (3) являє собою рівняння кубічної параболи та є рівнянням траєкторії точки у координатній формі. Тобто траєкторія точки знаходиться на кубічній параболі $y = 2(x + 4)^3$. У початковий момент часу положення точки визначається координатами $M_0(-4;0)$. З плином часу вона рухається параболою в нескінченність правого квадранта (додатного) декартових координат.

2 Швидкість точки знайдемо за її проєкціями на координатні вісі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 1 \text{ (см/с)}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = 6t^2 \text{ (см/с)};$$

при $t = 1$ с; $V_{1x} = 1$ (см/с); $V_{1y} = 6$ (см/с);

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = 6,08 \text{ (см/с)}; \quad (4)$$

Вектори швидкості точки і його проєкції на осі зображені на рис.4.43, а.

3 Аналогічно знайдемо прискорення точок:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = 12t \text{ (см/с}^2\text{)}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

при $t = 1$ с;

$$a_{1y} = 12 \text{ (см/с}^2\text{)}; \quad a_1 = a_{1y} = 12 \text{ (см/с}^2\text{)}. \quad (5)$$

4 Дотичне прискорення знайдемо шляхом диференціювання за часом рівності

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2; \quad a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (6)$$

Підставивши у вираз (6) чисельні значення отримаємо:

$$a_{1t} = \frac{1 \cdot 0 + 6 \cdot 12}{6,08} = 11,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

5 Нормальне прискорення точки:

$$a_n = \sqrt{a_1^2 - a_{1t}^2} = \sqrt{12^2 - 11,8^2}; \quad a_{1n} = 2,2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор повного прискорення точки, його складові, дотичне і нормальне прискорення, а також проєкції вектора прискорення на осі координат зображені на рисунку 4.43, б.

6 Радіус кривизни траєкторії: $r = \frac{V^2}{a_n}$.

Підставивши в останній вираз числові значення присутніх в ньому величин для $t_1 = 1\text{с}$, знаходимо радіус кривизни траєкторії для цього моменту часу:

$$r_1 = \frac{6,08^2}{2,2} = 16,8(\text{см}).$$

Відповідь: $V_1 = 6,08$ (см/с); $a_1 = 12$ (см/с²); $a_{1t} = 11,8$ (см/с²);
 $a_n = 2,2$ (см/с²); $r_1 = 16,8$ (см).

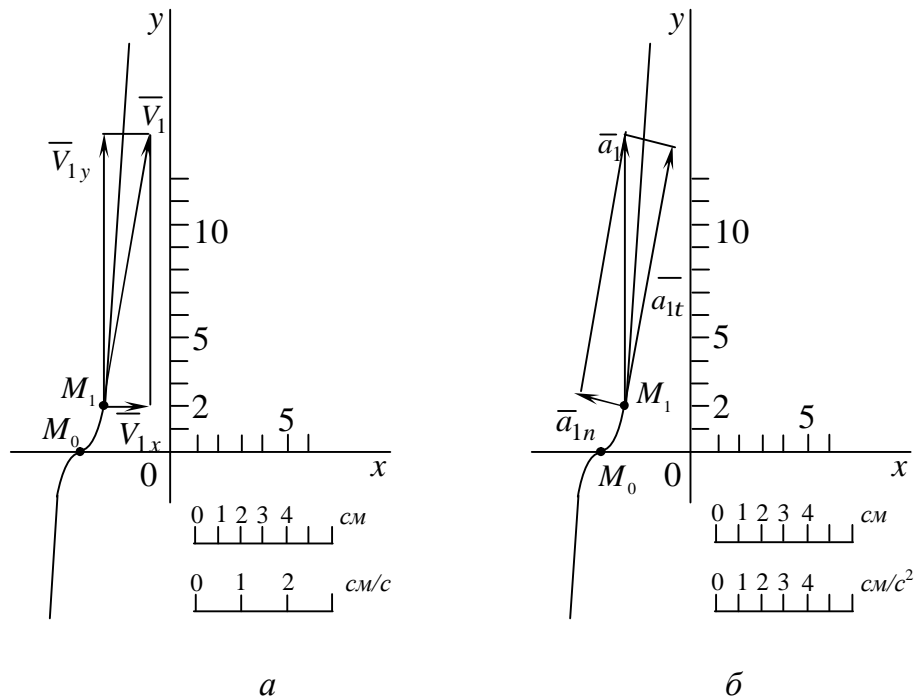


Рисунок 4.43

Приклад 2

Дано: $x = -4 \cos\left(\frac{p}{3}t\right)$ (см); $y = -2 \sin\left(\frac{p}{3}t\right) - 3$ (см);

$t_1 = 1$ (с).

Знайти: вид траєкторії точки, положення точки на траєкторії, її швидкість, прискорення, складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії для моменту часу t_1 .

Розв'язання

1 Рівняння руху (1) можна рахувати як параметричні рівняння траєкторії точки. Щоб отримати рівняння траєкторії в координатній формі, виключимо параметр t з рівнянь (1).

Отримаємо:

$$\begin{cases} x = -4 \cos\left(\frac{p}{3}t\right); & \cos\left(\frac{p}{3}t\right) = \frac{x}{4}; \\ y = -2 \sin\left(\frac{p}{3}t\right) - 3; & \sin\left(\frac{p}{3}t\right) = \frac{y+3}{2}; \end{cases}$$
$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1 .$$

Отримане рівняння являє собою рівняння еліпса. Осі еліпса симетричні декартовим осям координат, а його центр знаходиться на осі Оу у положенні (0;-3).

2 Швидкість та прискорення точки знайдемо за її проекціями на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4p}{3} \sin\left(\frac{p}{3}t\right) \text{ (см/с)}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{2p}{3} \cos\frac{p}{3}t ,$$
$$a_x = \frac{4p^2}{9} \cos\frac{p}{3}t \text{ (см/с}^2\text{)}, \quad a_y = \frac{2p^2}{9} \sin\frac{p}{3}t \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

За знайденими проекціями визначаються модуль швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{2p}{3} \sqrt{3 \sin^2 \frac{p}{3}t + 1} .$$

та модуль прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{2p^2}{9} \sqrt{3 \cos^2 \left(\frac{p}{3}t\right) + 1} .$$

Модуль дотичного прискорення точки $a_t = \left| \frac{dV}{dt} \right|$,

$$a_t = \left| \frac{\frac{6p^2}{9} \sin\left(\frac{p}{3}t\right) \cos\left(\frac{p}{3}t\right)}{\sqrt{3\sin^2\frac{p}{3}t + 1}} \right|.$$

Модуль нормального прискорення точки $a_n = \frac{V^2}{r}$.

Якщо радіус кривизни траєкторії ρ у точці, яку ми розглядаємо, невідомий, то a_n можна визначити за формулою

$$a_n = \frac{|\vec{V} \cdot \vec{a}|}{V}.$$

При русі точки у площині формула набуде виду

$$a_n = \frac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \frac{\frac{4p^2}{9}}{\sqrt{3\sin^2 a + 1}}.$$

Модуль нормального прискорення можна визначити також за формулами:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}, \quad r = \frac{V^2}{a_n}, \quad r = 3\sin^2\frac{p}{3}t + \sqrt{3\sin^2 a + 1}.$$

Відповідь: $y=-4,73$ см, $x=-2$ см, $V_x=3,63$ см/с, $V_y=-1,04$ см/с,
 $V=3,77$ см/с, $a_x=2,19$ см/с², $a_y=1,89$ см/с², $a=2,89$ см/с², $a_t=14,22$ см/с²,
 $a_n=2,43$ см/с², $\rho=6,48$.

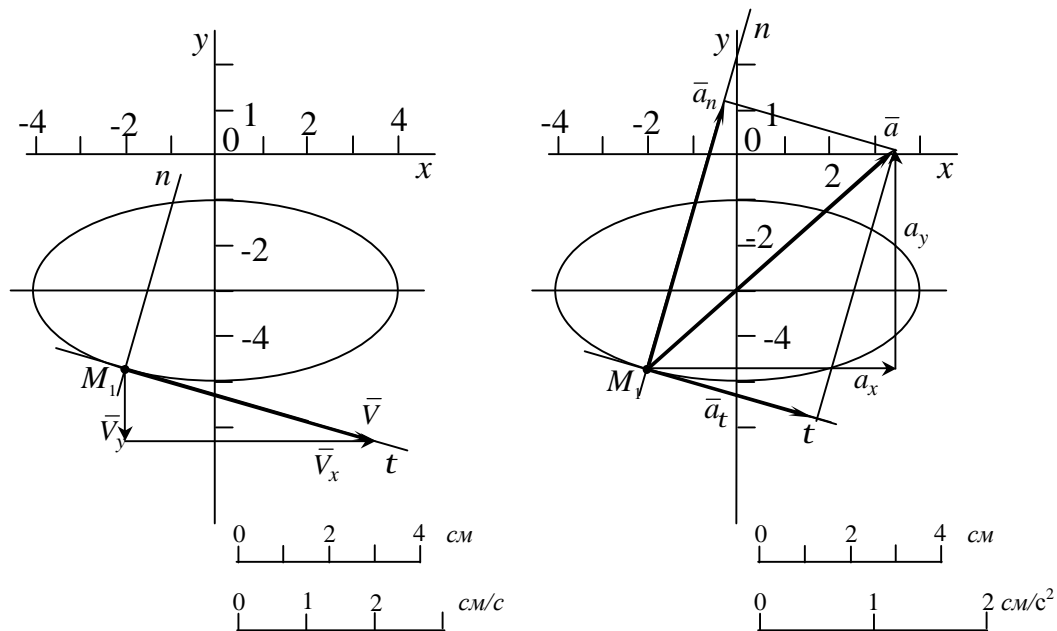


Рисунок 4.44

Приклад 3

Дано: $x = 7 \sin\left(\frac{p}{6} t^2\right) + 3$ см, $y = 2 - 7 \cos\left(\frac{p}{6} t^2\right)$ см, $t_1 = 1$ с.

Знайти: рівняння траєкторії, \bar{V} , \bar{a} , \bar{a}_t , \bar{a}_n , Γ .

Розв'язання

1 Отримаємо рівняння траєкторії в координатній формі, виключивши час t з рівнянь $x(t)$ і $y(t)$:

$$\begin{cases} x = 7 \sin\left(\frac{p}{6} t^2\right) + 3, & \left[\left(\frac{x-3}{7}\right)^2 = \sin^2 \frac{p}{6} t^2,\right. \\ y = 2 - 7 \cos\left(\frac{p}{6} t^2\right). & \left.\left[\left(\frac{y-2}{7}\right)^2 = \cos^2 \frac{p}{6} t^2.\right] \right. \end{cases}$$

$$\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{49} = \sin^2 \frac{p}{6} t^2 + \cos^2 \frac{p}{6} t^2.$$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$ – рівняння кола радіусом $R=7$ та центром $C(3;2)$.

2 Знайдемо положення точки M на траєкторії у заданий момент часу:

$$x = 7 \sin \frac{p}{6} t^2 + 3 = 7 \sin \left(\frac{p}{6} \cdot 1^2 \right) + 3 = 7 \cdot 0,5 + 3 = 6,5 \text{ (см/с)},$$

$$y = 2 - 7 \cos \frac{p}{6} t^2 = 2 - 7 \cos \left(\frac{p}{6} \cdot 1^2 \right) = 2 - 7 \cdot 0,866 = 4,06 \text{ (см/с)},$$

$M(6,5; -4,06)$.

3 Визначимо швидкість точки M :

$$\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j};$$

$$V_x = 7 \frac{2p}{6} t \cdot \cos \frac{p}{6} t^2 = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 1}{6} \cdot \cos \frac{p}{6} = 6,35 \text{ (см/с)},$$

$$V_y = -7 \frac{2p}{6} t \cdot \left(-\sin \frac{p}{6} t^2 \right) = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 1}{6} \cdot \sin \frac{p}{6} = 3,66 \text{ (см/с)}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{6,35^2 + 3,66^2} = 7,33 \text{ (см/с)},$$

4 Визначимо повне прискорення точки M :

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j};$$

$$a_x = \frac{14p}{6} t \cdot \frac{2p}{6} t \cdot \left(-\sin \frac{p}{6} t^2 \right) + \frac{14p}{6} \cos \frac{p}{6} t^2 = 2,51 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_y = \frac{14p}{6} t \cdot \frac{2p}{6} t \cdot \cos \frac{p}{6} t^2 + \frac{14p}{6} \cdot \sin \frac{p}{6} t^2 = 10,3 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10,6 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

5 Визначимо дотичне та нормальне прискорення точки M :

$$a_t = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \left| \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \right| = 7,32 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_t; \quad a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{10,6^2 - 7,32^2} = 7,67 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

6 Визначимо радіус кривизни траєкторії: $a_n = \frac{V^2}{r}$;

$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{7,33^2}{7,67} = 7 \text{ см.}$$

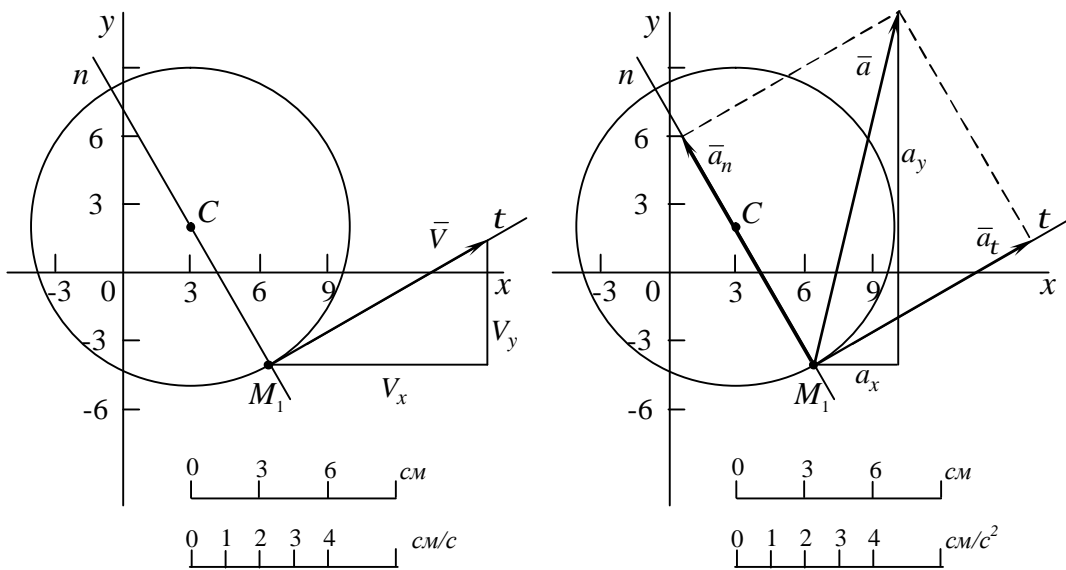


Рисунок 4.45

Відповідь: $V = 7,73 \text{ см/с}$, $a = 10,6 \text{ см/с}^2$, $a_t = 7,32 \text{ см/с}^2$,
 $a_n = 7,67 \text{ см/с}^2$, $r = 7 \text{ см}$.

4.2.2 ЗАДАЧА К2

ВКАЗІВКА 1. Задача К2 відноситься до кінематики простих рухів тіла а саме – на передатні механізми та дослідження обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

4.2.2.1 Стислі відомості з теорії кінематики простих рухів тіла

Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі, а всі точки рухаються з однаковими швидкостями та прискореннями.

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії.

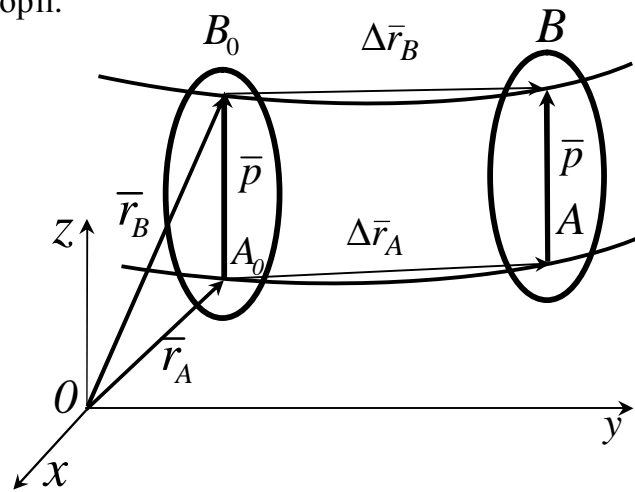


Рисунок 4.46

Дійсно, розглянемо в твердому тілі пряму A_0B_0 (рис.4.46.). Положення точки A_0 визначає радіусом-вектором \vec{r}_A , положення точки B_0 -радіусом-вектором \vec{r}_B , $\overline{A_0B_0} = \vec{p}$. Між \vec{r}_B , \vec{r}_A та \vec{p} існує залежність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{p} \quad (4.54)$$

При русі тіла \vec{r}_A та \vec{r}_B змінюється у часі, тобто $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$, $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$. Вектор \vec{p} залишається сталим. Тоді

$$\Delta \bar{r}_B = \Delta \bar{r}_A, \quad (4.55)$$

отже траєкторію точки B можна одержувати паралельним переносом траєкторії точки A .

Прикладом такого руху може бути механізм, що складається з кривошипів O_1A і O_2B однакової довжини, насаджених на вали O_1 та O_2 (рис. 4.47) і з'єднаних спарником AB , довжина якого дорівнює відстані O_1O_2 . Очевидно, що при всіх положеннях механізму O_1ABO_2 залишається паралелограмом. Отже, спарник AB залишається паралельним прямій O_1O_2 , і його рух є поступальним.

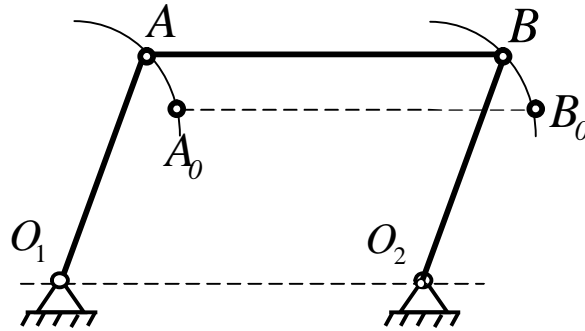


Рисунок 4.47

Диференціюючи за часом рівняння (4.54), одержуємо:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{p}}{dt} \quad (4.56)$$

Оскільки $\bar{p} = const$, то із рівняння (4.56) маємо:

$$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\bar{r}_B}{dt} \quad \text{або} \quad \bar{V}_A = \bar{V}_B \quad (4.57)$$

Диференціюємо ще раз (4.57) за часом, отримуємо:

$$\frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_A}{dt} \text{ або } \bar{a}_B = \bar{a}_A \quad . \quad (4.58)$$

Тому вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху будь-якої його точки.

Обертальний рух твердого тіла. Кутові швидкість і прискорення

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому пряма, що проходить через які-небудь дві точки під час руху тіла залишається нерухомою.

Пряма, що проходить через нерухомі точки називається віссю обертання.

Припустимо, що нерухомими точками є точки A і B , через які проходить вісь обертання Z (рис.4.48).

Для визначення положення тіла, що обертається, оберемо нерухому площину I і площину II , врізану в саме тіло, і яка обертається разом з ним.

Тоді положення тіла в різні моменти часу визначатимуться відповідним кутом j між площинами I і II (рис.4.49.), цей кут називається кутом оберту тіла.

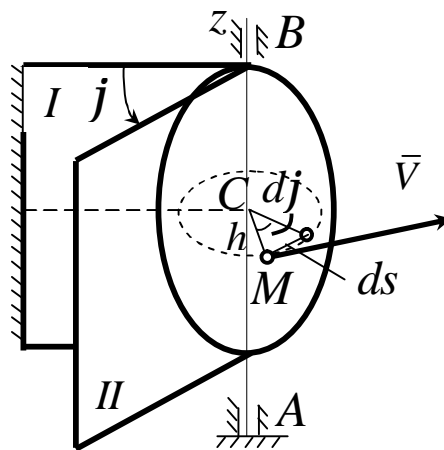


Рисунок 4.48

Таким чином, щоб визначити положенням тіла в довільний момент часу, необхідно знати залежність кута j від часу t , тобто

$$j = j(t). \quad (4.59)$$

Рівняння (4.59) задає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість W і кутове прискорення e .

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло обернулося на кут $\Delta j = j_1 - j$, то чисельно середня кутова швидкість тіла за цей проміжок часу буде

$$w_{cp} = \Delta j / \Delta t.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ знайдемо

$$W = \frac{dj}{dt} \text{ або } W = \dot{j}. \quad (4.60)$$

Таким чином, числове значення кутової швидкості тіла в заданий момент часу дорівнює першій похідній за часом від кута обертуті.

Знак W визначає напрямок обертуті тіла.

Кутове прискорення характеризує зміну з течією часу кутової швидкості тіла. Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість тіла змінюється на величину $\Delta W = W_1 - W$, то числове значення середнього кутового прискорення тіла за цей проміжок часу буде

$$e_{cp} = \Delta W / \Delta t.$$

У межах при $\Delta t \rightarrow 0$ знайдемо, що

$$e = \frac{dW}{dt} = \frac{d^2 j}{dt^2} \text{ або } e = \dot{W} = \ddot{j}. \quad (4.61)$$

Таким чином, числове значення кутового прискорення тіла в заданий момент часу дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута оберту тіла від часу.

Якщо кутова швидкість тіла залишається увесь час руху сталою ($w = const$), то обертання тіла називається *рівномірним*.

Тоді із формули (4.60) маємо

$$dj = w dt.$$

Враховуючи, що в початковій момент часу $t = 0$ кут $j = j_0$, після інтегрування лівої частини від j_0 до j , а правої від 0 до t , отримаємо остаточно

$$j = j_0 + wt. \quad (4.62)$$

Із рівняння (4.62) випливає, що при рівномірному обертанні, коли $j_0 = 0$,

$$j = wt \text{ і } w = \frac{j}{t}. \quad (4.63)$$

У техніці швидкість рівномірного обертання часто визначають кількістю обертів за хвилину. Знайдемо залежність між *об/хв* та радіанною мірою кутової швидкості.

При одному оберті тіло повернеться на кут 2π , а при n обертах на $2\pi n$. Цей оберт виконується за час $t = 60c$.

Із рівняння (4.62) тоді випливає, що

$$w = \pi n / 30 \approx 0,1n. \quad (4.64)$$

Якщо кутове прискорення тіла весь час руху є сталим ($e = const$), то обертання називається *рівнозмінним*.

Знайдемо закон рівнозмінного обертання, враховуючи, що в початковий момент часу $t = 0$, кут $j = j_0$, а кутова швидкість $W = W_0$ (W_0 – початкова кутова швидкість) із формули (4.61) маємо:

$$dW = e dt.$$

Інтегруючи ліву частину в межах від W_0 до W , а праву – в межах від 0 до t , знайдемо

$$W = W_0 + et. \quad (4.65)$$

Подамо вираз (4.65) у вигляді $\frac{dj}{dt} = W_0 + et$ або

$$dj = W_0 dt + et dt.$$

Вдруге інтегруючи, знайдемо закон рівномірного обертання:

$$j = j_0 + wt + et^2/2. \quad (4.66)$$

Якщо числові значення W і e мають однакові знаки, обертання буде рівноприскореним, а якщо різні – рівносповільненим.

Встановивши характеристики руху всього тіла в цілому, перейдемо до вивчення руху окремих його точок.

Обертальний рух твердого тіла. Швидкість і прискорення точок тіла. Перетворення поступального і обертального рухів тіла в механізмах

1 **Швидкість точок тіла.** Розглянемо будь-яку точку M твердого тіла, яка знаходиться на відстані h від осі обертання (рис. 4.48). При обертанні тіла точка M буде відкреслювати коло радіуса h , площина якого перпендикулярна до вісі обертання, а центр C лежить на самій осі. Якщо за час dt здійснюється елементарний оберт на кут dj , то точка M при цьому здійснює вздовж своєї траєкторії елементарне переміщення

$$ds = h dj .$$

Тоді числове значення швидкості точки буде дорівнювати співвідношенню ds до dt , тобто

$$V = \frac{ds}{dt} = h \frac{dj}{dt}$$

або

$$V = h\omega . \quad (4.67)$$

Швидкість V на відзнаку від кутової швидкості називають іноді **лінійною** або круговою швидкістю точки M .

Таким чином, числове значення швидкості точки твердого тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від точки до осі обертання.

Спрямована швидкість за дотичною до кола, що є траєкторією точки або перпендикулярно площині, яка проходить через вісь обертання і точку M . Так як для всіх точок тіла ω має у даний час одне і теж значення, то із формули (4.67) випливає, що швидкості точок тіла, яке обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання. Поле швидкостей точок тіла має вигляд, показаний на рисунку 4.49.

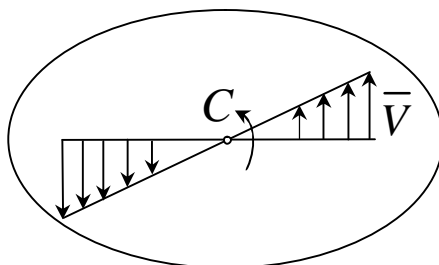


Рисунок 4.49

2 **Прискорення точок тіла.** Для знаходження прискорення точки M скористаємося формулами

$$a_t = \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{r}$$

або у іншому вигляді:

$$a_t = eh, a_n = w^2 h. \quad (4.68)$$

Дотична складова \bar{a}_t напрямлена за дотичною до траєкторії (у напрямку обертання при прискореному обертанні тіла і в зворотному напрямку при сповільненому).

Нормальна складова \bar{a}_n завжди спрямована за радіусом MC до осі обертання (рис.4.50).

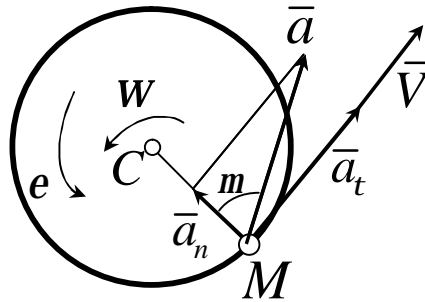


Рисунок 4.50

Повне прискорення точки M буде:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad \text{або} \quad a = h\sqrt{e^2 + w^4}. \quad (4.69)$$

Відхилення вектора повного прискорення від радіуса кола, яке є траєкторією точки, позначається кутом m , який визначається за формулою

$$\operatorname{tg} m = \frac{e}{w^2}. \quad (4.70)$$

Оскільки w і e мають у даний момент часу для всіх точок тіла одне і теж значення, то із формул (4.69) і (4.70) випливатиме, що прискорення всіх точок тіла пропорційні їх відстаням від осі обертання і утворюють у даний момент часу один і той самий кут m з радіусами кіл, що ними описуються. Поле прискорень точок твердого тіла, що обертається, має вигляд, показаний на рисунку 4.51.

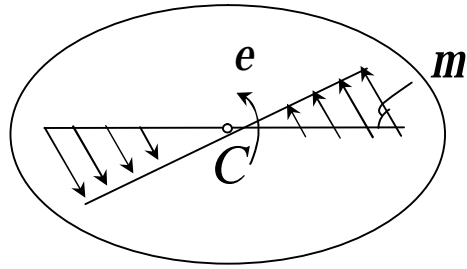


Рисунок 4.51

Формули (4.67)...(4.70) дають змогу визначити швидкість і прискорення довільної точки тіла, якщо відомий закон обертання тіла, і відстань від даної точки до вісі обертання. За цими ж формулами можна знайти рух будь-якої іншої точки, знаючи рух однієї точки тіла, а також характеристики руху всього тіла в цілому.

3 Вектори швидкості та прискорення точок тіла. Щоб знайти вираз безпосередньо для векторів \vec{V} і \vec{a} , проведемо із довільної точки O осі Z радіус-вектор \vec{r} точки M (рис.4.52).

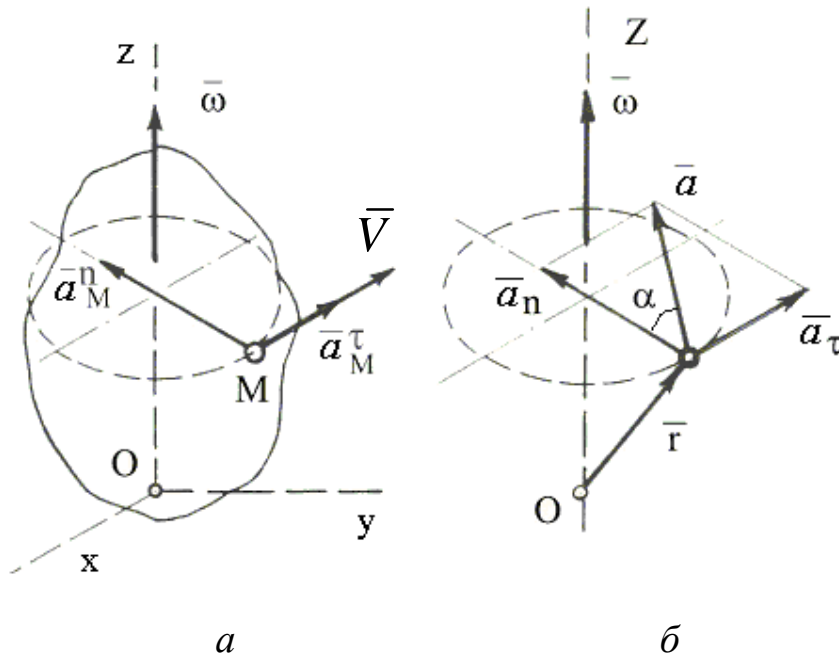


Рисунок 4.52 – Напрямок векторів прискорення точки M

Тоді

$$h = r \sin \alpha$$

і за формулою (4.66)

$$|\bar{V}| = |\bar{w}|h = |w|rsina, \text{ або } |\bar{V}| = |\bar{w} \times \bar{r}|.$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\bar{w} \times \bar{r}$ дорівнює модулю швидкості точки M . Напрямок векторів $\bar{w} \times \bar{r}$ і \bar{V} теж співпадають, бо вони перпендикулярні площині OMB і розмірності їх однакові. Отже,

$$\bar{V} = \bar{w} \times \bar{r}. \quad (4.71)$$

Тобто, вектор швидкості будь-якої точки тіла під час його обертання дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки.

Формулу (4.71) називають формулою Ейлера. Візьмемо від обох частин рівняння (4.71) похідні за часом, отримаємо:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \left(\frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{w} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right)$$

або

$$\bar{a} = (\bar{e} \times \bar{r}) + (\bar{w} \times \bar{V}) \quad (4.72)$$

Формула (4.72) визначає вектор прискорення довільної точки тіла, що обертається.

Вектор $\bar{e} \times \bar{r}$ спрямований, як і вектор $\bar{w} \times \bar{r}$, тобто за дотичною до траєкторії точки M , причому

$$|\bar{e} \times \bar{r}| = ersina = eh.$$

Вектор $\bar{w} \times \bar{V}$ спрямований вздовж MC , тобто за нормаллю до траєкторії точки M , а

$$|\bar{w} \times \bar{V}| = wV \sin 90^\circ = w^2 h,$$

оскільки $V = wh$.

Враховуючи всі ці результати матимемо

$$\bar{e} \times \bar{r} = \bar{a}_t \quad \bar{w} \times \bar{V} = \bar{a}_n.$$

ВКАЗІВКИ 2. При розв'язанні задачі необхідно врахувати, що, коли два колеса знаходяться у зачепленні, швидкість точки зачеплення кожного колеса одна й та ж, а коли два колеса зв'язані ремінною передачею, то швидкості всіх точок ременя, отже, й точок, що лежать на ободі кожного з цих коліс, у даний момент часу чисельно однакові; при цьому вважається, що ремінь по ободу колеса не ковзає.

При внутрішньому зачепленні (див.рис.4.53, а) і не перехресній пасовій передачі (див.рис.4.54, а) напрями обертань обох коліс збігаються. При зовнішньому зачепленні (див.рис.4.53, б) і перехресній пасовій передачі (див.рис.4.54, б) напрямки обертань коліс протилежні.

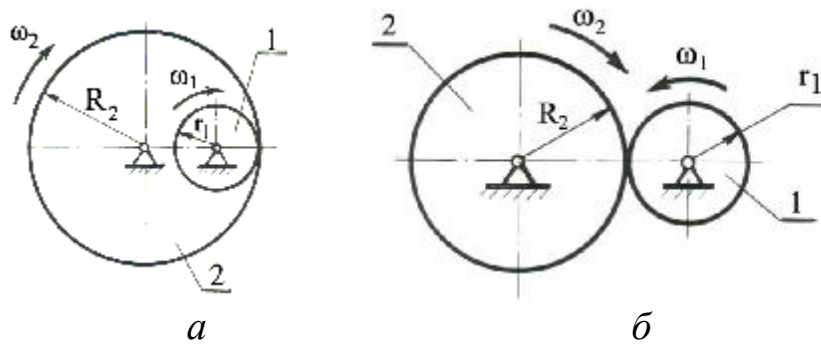


Рисунок 4.53 – Приклад зубчастого зачеплення

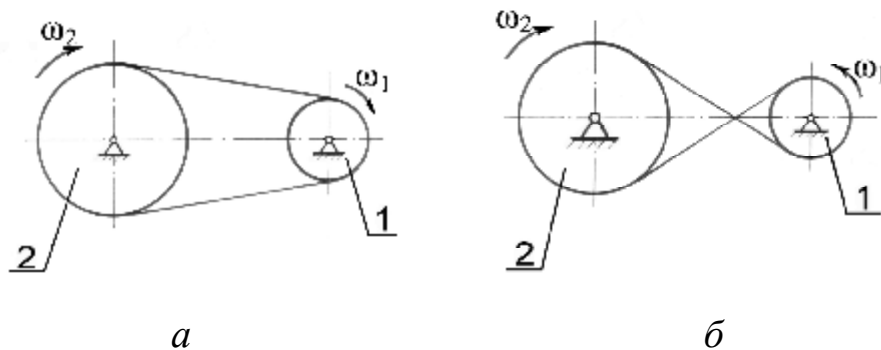


Рисунок 4.54 – Приклад пасової передачі

Величини швидкостей на ободі зубчастих коліс, які знаходяться у зачепленні, однакові. Однакові за модулем і швидкості на ободі шківів пасової передачі, якщо немає ковзання паса по шківу.

Кутові швидкості коліс обернено пропорційні кількості зубців, радіусам або діаметрам коліс:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1},$$

де W_1 і W_2 — модулі кутових швидкостей;

r_1, r_2 — радіуси коліс; d_1, d_2 — діаметри коліс;

z_1, z_2 — кількість зубців відповідно першого і другого коліс.

Питання для самоперевірки

- 1 Який рух тіла називається поступальним?
- 2 Як розподіляються швидкості й прискорення в тілі при поступальному русі його?
- 3 Як скласти рівняння поступального руху тіла в координатній формі?
- 4 Як скласти рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?
- 5 Як визначити кут повороту і в яких одиницях він вимірюється?
- 6 Що таке кутова швидкість і яку вона має розмірність?
- 7 Як напрямлений вектор кутової швидкості при обертальному русі тіла?
- 8 Що таке кутове прискорення і яку воно має розмірність?
- 9 Як напрямлений вектор кутового прискорення при обертальному русі тіла?
- 10 Як знайти кутову швидкість, коли задано кут повороту або кількість обертів?
- 11 Як знайти кутове прискорення, коли задано кут повороту або кутову швидкість?
- 12 Який вигляд має рівняння рівномірного обертального руху?
- 13 Як знайти кутову швидкість і кут повороту тіла при рівно змінному обертанні навколо нерухомої осі?
- 14 Як визначити величину і напрям дотичного прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

15 Як визначити величину і напрям нормального прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

16 Яким є обертання тіла, якщо дотичне прискорення точок тіла дорівнює нулю?

4.2.2.2 Умова задачі

Механізм складається зі ступінчастих коліс 1...3, які знаходяться у зачепленні чи зв'язані ремінною передачею, зубчастої рейки 4 та тягаря 5, прив'язаного до кінця нитки, намотаної на одно з коліс (рис.4.55, арк.. 1, 2), табл. 4.10). Радіуси ступенів коліс дорівнюють відповідно: у колеса 1 - $r_1 = 12$ см, $R_1 = 16$ см, у колеса 3 - $r_3 = 2$ см; $R_3 = 4$ см.

На ободах коліс розташовані точки A , B та C . У стовпці «Дано» таблиці 4.10 вказаний закон руху чи закон зміни швидкості ведучої ланки механізму, де $\varphi_1(t)$ – закон обертання колеса 1, $S_4(t)$ – закон руху рейки 4; $j\ddot{\varphi}_1(t)$, $j\ddot{\varphi}_2(t)$, $j\ddot{\varphi}_3(t)$ – закони зміни кутових швидкостей коліс 1,2 та 3; $V_5(t)$ – закон зміни швидкості тягаря 5 і т.д. (скрізь φ виражене у радіанах, S – у метрах, t – у секундах, V – у метрах на секунду). Додатній напрямок для φ та $j\ddot{\varphi}$ проти ходу годинникової стрілки.

Додатні напрямки руху тягаря та рейки вказано на рисунках 4.55 напрямком відповідних осів – x та z . Визначити у момент часу $t_1 = 2$ с вказані в таблиці 4.10 у стовпцях «Знайти» швидкості (V – лінійні, ω – кутові) та прискорення (a – лінійні, e – кутові) відповідних точок чи тіл (V_5 – швидкість тягаря 5 і т.д.).

ПРИМІТКА. У схемах, що мають внутрішнє зачеплення коліс (схеми 3, 5 та 7), радіус колеса 1 – R_1 визначаються з умов складання механізму: $R_1 = R_2 + 2R_3$ чи $R_1 = r_2 + 2R_3$.

Таблиця 4.10

Номер умови	Дано	Знайти	
		Швидкості	Прискорення
0	$S_4 = 0,2 \sin \frac{pt}{3} \text{ (м)}$	V_A, ω_1	a_3, a_5, e_1
1	$S_5 = 0,2t^3 + t \text{ (м)}$	V_C, ω_3	a_3, a_4, e_3
2	$V_4 = 2,5 \cos \frac{pt}{3} \text{ (м/с)}$	V_5, ω_2	a_A, a_5, e_1
3	$V_5 = 4t + 1,6t^2 \text{ (м/с)}$	V_4, ω_3	a_C, a_4, e_3
4	$j\&_1 = 0,2(16 \cos \frac{p}{8}t - 3) \text{ (с}^{-1}\text{)}$	V_C, ω_3	a_4, a_C, e_3
5	$j\&_2 = 5(1 + \sin \frac{p}{3}t) \text{ (с}^{-1}\text{)}$	V_5, ω_4	a_4, a_5, e_1
6	$j\&_3 = \frac{1}{3}p \cos \frac{p}{8}t \text{ (с}^{-1}\text{)}$	V_A, ω_1	a_5, a_A, e_1
7	$j_1 = 6t - 0,2t^3 \text{ (рад)}$	V_4, ω_2	a_C, a_4, e_3
8	$j_2 = 2t^3 - 5t \text{ (рад)}$	V_C, ω_5	a_5, a_4, e_3
9	$j_3 = t^2 - 0,1t^3 \text{ (рад)}$	V_5, ω_2	a_A, a_5, e_1

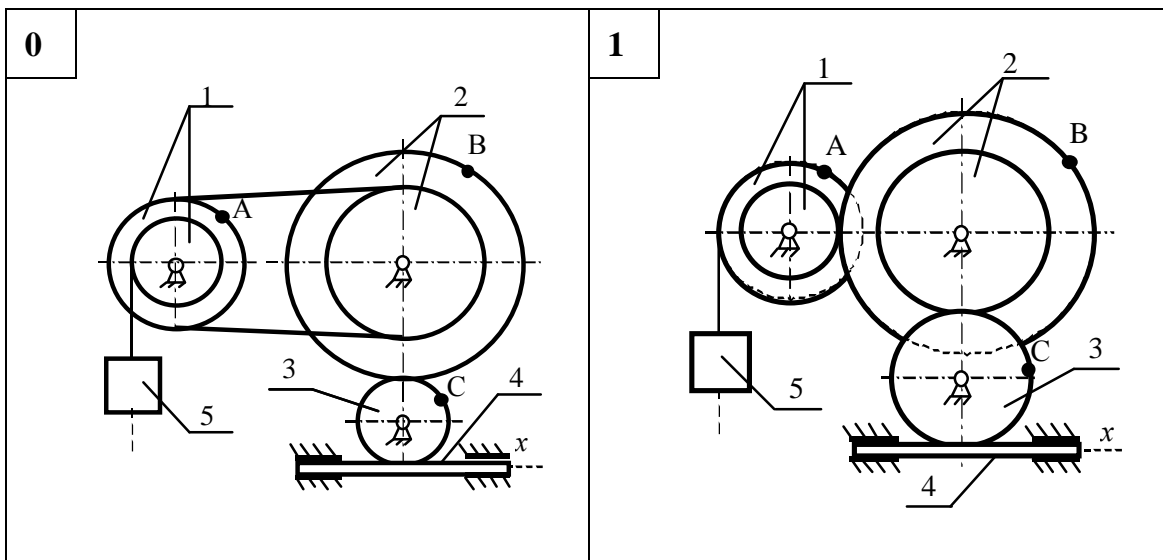


Рисунок 4.55

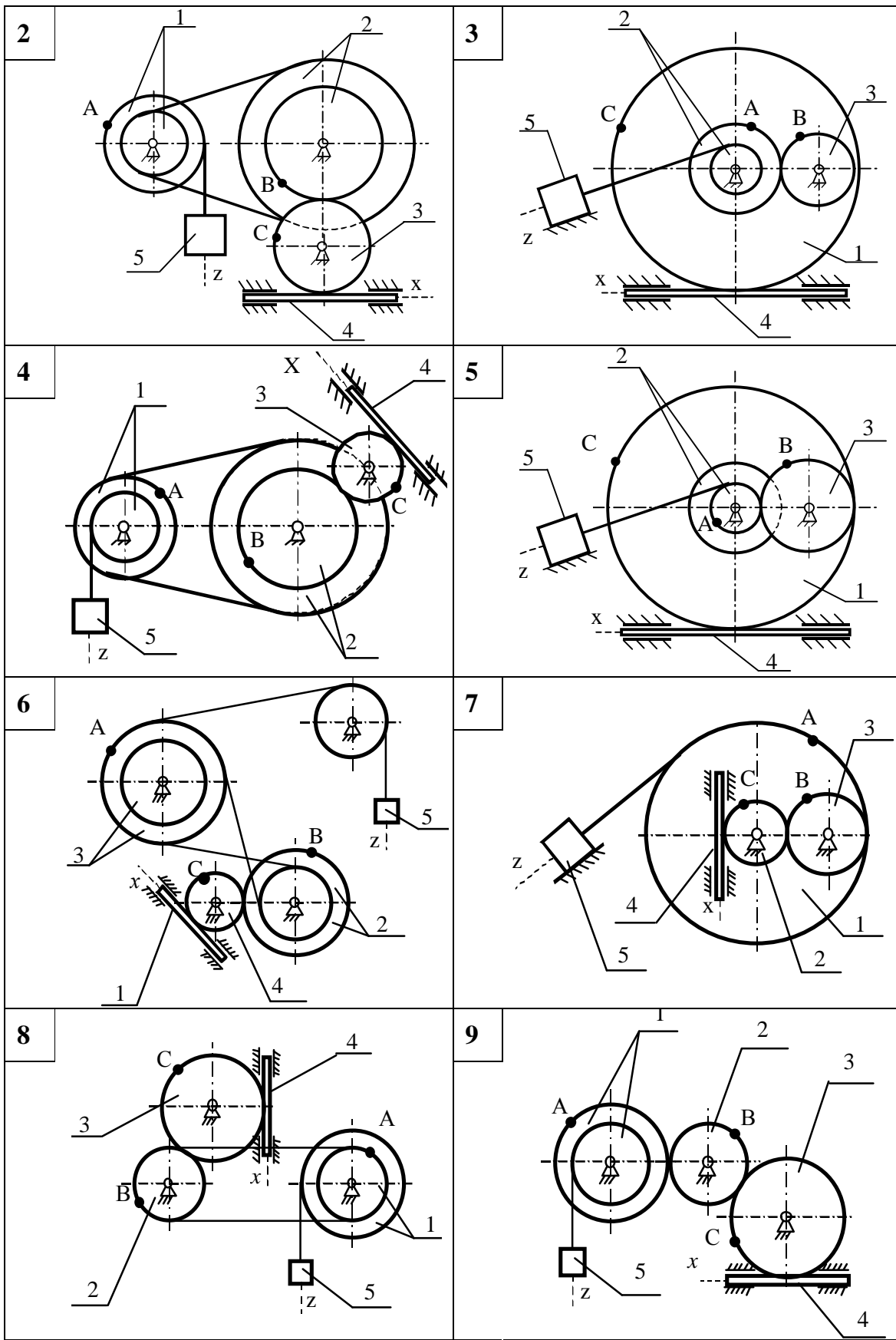


Рисунок 4.55, аркуш 2

4.2.2.3 Приклади рішення задачі К2

Приклад 1

Дано: схема механізму (див. рис. 4.56); рівняння поступального руху тягара 5: $z_5=10+100t^2$ (см).

Розміри коліс механізму $R_1 = 50$ см; $r_1 = 30$ см;

$R_2 = 60$ см; $r_2 = 40$ см.

Знайти:

1) закони зміни кутових швидкостей коліс 1 і 2: $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$;

2) кутову швидкість та кутове прискорення колеса 2: ω_2 , ϵ_2 ;

3) лінійну швидкість і прискорення точки В: V_B , a_B^τ , a_B^n ;

4) швидкість зубчатої рейки 4: V_4 .

Усі обчислення виконати для моменту часу, коли кут повороту ступінчатого колеса 2

$$j_2 = 0,7 \text{ оберту.}$$

Розв'язання

1 Знайдемо момент часу τ , для якого кут повороту ступінчатого колеса 2, j_2 становить $j_2 = 0,7$ оберту при заданому русі тягара 5 $z_5 = 10 + 100t^2$ (см). Для цього установимо залежність кута повороту колеса 2 – j_2 від переміщення тягара 5 – z_4 .

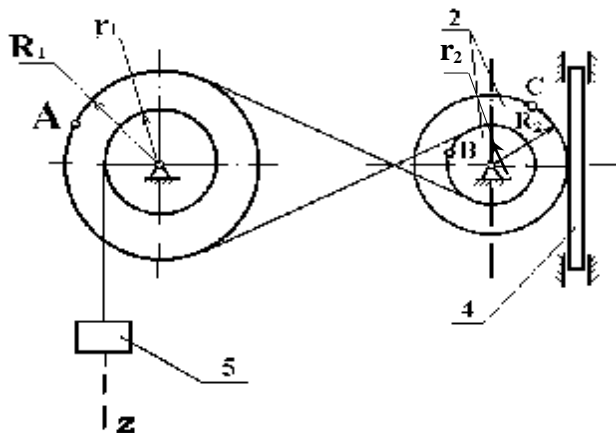


Рисунок 4.56

$$\dot{j}_1(t) = z_5(t)/r_1; \quad \dot{j}_1(t) = (10+100t^2)/30; \quad \dot{j}_2(t) \cdot r_2 = \dot{j}_1(t) \cdot R_1;$$

$$\dot{j}_2(t) = \dot{j}_1(t) \cdot R_1/r_2, \quad (1)$$

$$\dot{j}_2(t) = z_5(t) \cdot R_1/r_1 \cdot r_2. \quad (2)$$

Співвідношення (2) установлює зв'язок між лінійними переміщеннями тягара 5 і кутом повороту колеса 2.

Згідно з умовою задачі $\dot{j}_2 = 0,7$ оберту,

$$\dot{j}_2 = 0,7 \cdot 2 \cdot 3,14 = 4,39 \text{ (рад)}.$$

Цей кут повороту відповідає моменту часу τ , який можна знайти із співвідношення $\dot{j}_2 = \dot{j}_{2(t=\tau)} - \dot{j}_{2(t=0)}$.

$$\dot{j}_2 = (10+100\tau^2) \cdot 50/30 \cdot 40 - 10 \cdot 50/30 \cdot 40 = 25/6\tau^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{6 \cdot 4,39}{25}} = 1,02 \text{ (с)}.$$

2 Знайдемо кутові швидкості усіх коліс механізму як функції часу t .

Оскільки закон руху тягара 5 заданий умовою задачі, знаходимо його швидкість

$$V_5 = \dot{s}(t) = 200t \text{ (см/с)}.$$

Тягар 5 ниткою зв'язаний з циліндричною поверхнею радіуса r_1 ступінчатого колеса 1.

$$V_5 = \omega_1 r_1, \quad \omega_1 = V_1/r_1, \quad \omega_1 = 200t/30 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Ступінчаті колеса 1 і 2 зв'язані між собою перехресною передачею.
Напрями обертань коліс протилежні, $w_1 R_1 = w_2 r_2$.

$$w_2 = w_1 R_1 / r_2 = 200t \cdot 50 / 30 \cdot 40 = 25t/3, (c^{-1}).$$

Отже, $w_1 = 20 \cdot t/3 (c^{-1})$, $w_2 = 25t/3, c^{-1}$.

Для заданого моменту часу $w_1 = 6,85, c^{-1}$; $w_2 = 6,55, c^{-1}$.

3 Знаходимо швидкість переміщення зубчатої рейки 4.

$$V_4 = V_K = w_2 R_2,$$

коли $t = t = 1,02 c$.

$$V_4 = 6,55 \cdot 60 = 393 (cm/c).$$

4 Знаходимо кутове прискорення ступінчатого колеса 2.

$$e_2 = dw_2 / dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{25}{3} t \right) = 25/3 = 8,33 (c^{-2}).$$

5 Знаходимо швидкість точки В:

$$V_B = \omega_2 r_2 = 6,55 \cdot 40 = 262 (cm/c).$$

6 Знаходимо прискорення точки В.

Для точки В $\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n$, де $a_B^n = w_2^2 r_2$, $a_B^\tau = e_2 r_2$.

Тоді для моменту часу $t = t = 1,02 \text{ c}$ маємо:

$$a_B^n = 6,55^2 \cdot 40 = 1716,1 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_B^\tau = 8,33 \cdot 40 = 333,2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Модуль повного прискорення точки В –

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{1716,1^2 + 333,2^2} = 1748,14 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

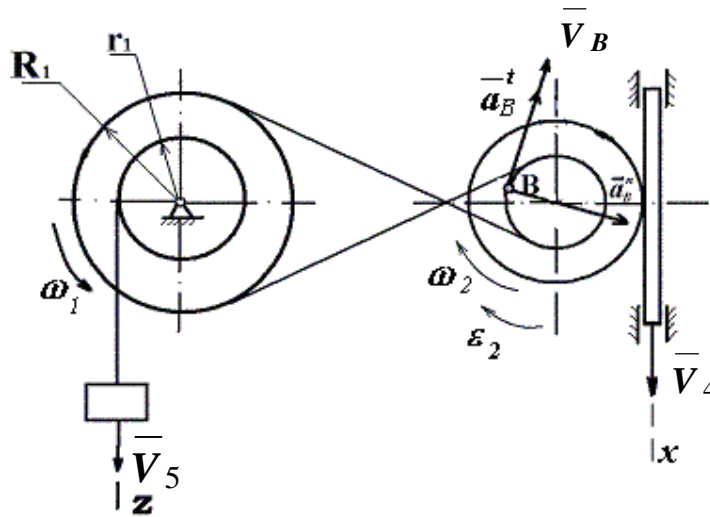


Рисунок 4.57

Усі швидкості та прискорення точок, а також напрямки кутових швидкостей показані на рисунку 4.57.

Відповідь: $\omega_1 = 20t/3 \text{ c}^{-1}$; $\omega_2 = 25t/3 \text{ c}^{-1}$; $\omega_{2(t=t)} = 6,55 \text{ c}^{-1}$; $\epsilon_2 = 8,33 \text{ c}^{-2}$; $V_B = 262 \text{ см/с}$; $a_B = 1748,14 \text{ см/с}^2$; $V_4 = 393 \text{ см/с}$.

Приклад 2

Дано: закон зміни кутової швидкості блока 2: $w_2 = 7t - 3t^2$ (рад/с);
 $r_1 = 2$ см; $r_2 = 6$ см; $r_3 = 12$ см; $R_1 = 4$ см; $R_2 = 8$ см; $R_3 = 16$ см.

Знайти: швидкість тягача V_5 , кутову швидкість ω_3 , прискорення точки А - a_A , та зубчастої рейки - a_4 , кутове прискорення e_2 для моменту часу $t_1 = 2$ с.

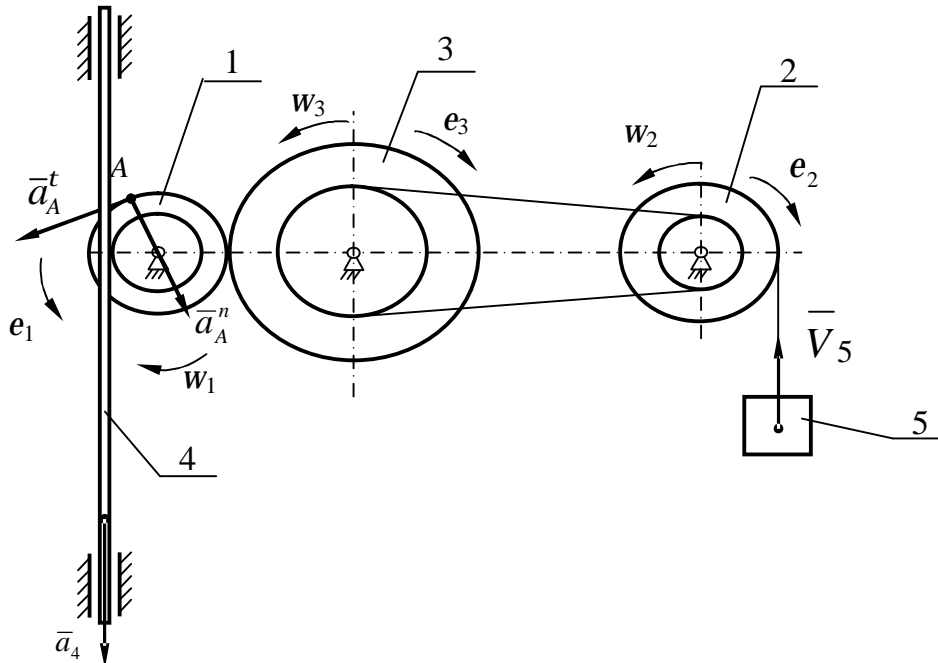


Рисунок 4.58

Розв'язання

Знайдемо кінематичні характеристики тих тіл системи, що здійснюють обертальний рух.

$$w_2 r_2 = w_3 r_3; \quad w_3 = \frac{w_2 r_2}{r_3} = \frac{(7t - 3t^2) r_2}{r_3},$$

при $t_1 = 2$ с, $w_2 = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 2$ (с⁻¹), $w_3 = 1$ (с⁻¹).

Кутове прискорення коліс 2 та 3:

$$e_2 = \dot{w}_2 = 7 - 6t; \quad e_3 = \dot{w}_3 = \frac{(7 - 6t) r_2}{r_3},$$

$$\text{при } t_1 = 2c, \quad e_2 = -5 (c^{-2}), \quad e_3 = \frac{5 \cdot 6}{12} = 2,5 (c^{-2}),$$

$$w_3 R_3 = w_1 R_1, \quad w_1 = \frac{w_3 R_3}{R_1}, \quad w_1 = \frac{(7t - 3t^2) r_2 R_3}{r_3 R_1},$$

$$e_1 = w_1 = \frac{(7 - 6t) r_2 \cdot R_3}{r_3 \cdot R_1}.$$

$$\text{при } t_1 = 2c \quad w_1 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 16}{12 \cdot 2} = 4 (c^{-1}), \quad e_1 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 16}{12 \cdot 4} = 10 (c^{-2}).$$

Знайдемо прискорення точки А блоку 1:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n, \quad a_A^t = e_1 \cdot R_1 = 10 \cdot 4 = 40 (см/с^2),$$

$$a_A^n = w_1^2 R_1 = 4^2 \cdot 4 = 64 (см/с^2),$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^t)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{40^2 + 64^2} = 75,5 (см/с^2).$$

Визначимо прискорення рейки 4.

Прискорення рейки чисельно дорівнює дотичному прискоренню точок ободу колеса Γ_1 :

$$a_4 = e_1 \cdot r_1 = 10 \cdot 2 = 20 (см/с^2).$$

Швидкість тягара 5:

$$V_5 = w_2 \cdot R_2 = 2 \cdot 8 = 16 (см/с).$$

Відповідь: $V_5 = 16 \text{ см/с}; a_4 = 20 \text{ см/с}^2; w_3 = 1 \text{ с}^{-1}; e_2 = -5 \text{ с}^{-2}.$

Оскільки $w_2 > 0$, а $e_2 < 0$ система рухається уповільнено.

4.2.3 ЗАДАЧА КЗ

ВКАЗІВКА 1. Задача КЗ – на дослідження плоскопаралельного руху тіла.

4.2.3.1 Стислі відомості з теорії кінематики плоско-паралельного руху твердого тіла

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки переміщуються паралельно будь-якій фіксованій площині (рис.4.59).

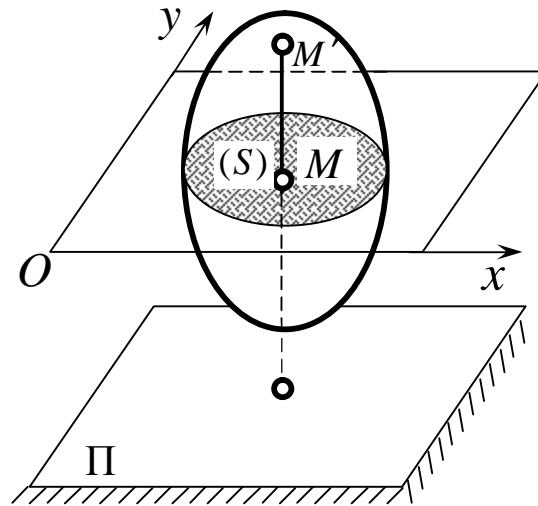


Рисунок 4.59

Плоский рух здійснюють багато частин механізмів і машин, наприклад колесо, яке котиться по поверхні, шатун в кривошипно-повзунному механізмі та інші. Розглянемо перетин (S) тіла якою-небудь площиною Oxy , паралельною площині Π (рис.4.59).

При плоскопаралельному рухові всі точки тіла, що лежать на прямій MM' , перпендикулярні перетину (S), тобто, площині Π , і рухаються тотожно.

Тому в подальшому замість плоского руху тіла будемо розглядати рух плоскої фігури (S) в її площині, тобто в площині Oxy . При цьому всі результати, які будуть отримані для точок плоскої фігури, справедливі й для точок (S) твердого тіла.

Рівняння руху плоскої фігури

Положення фігури (S) в площині Oxy визначається положенням якого-небудь проведеного на цій фігурі відрізка AB (рис.4.60). У свою чергу положення відрізка AB можна визначити, знаючи координати x_A , y_A точки A і кут j , який відрізок AB утворює з віссю x .

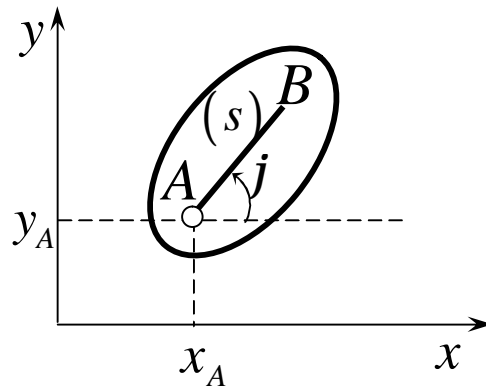


Рисунок 4.60

Точку A , обрану для визначення положення фігури (S), будемо далі називати **полюсом**. Під час руху фігури величини x_A , y_A і j будуть змінюватись. Щоб визначити закон руху, тобто положення фігури в площині Oxy в довільний момент часу, необхідно знати залежності:

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), j = f_3(t). \quad (4.73)$$

Рівняння (3.1), які визначають закон здійснюваного руху, називають **рівняннями руху плоскої фігури** в її площині, вони ж є **рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла**.

Перші два рівняння (4.73) визначають той рух, який фігура здійснювала б при $j = const$. Це очевидно, буде поступальний рух, при якому всі точки фігури рухаються так само, як полюс A .

Третє рівняння визначає рух, який фігура здійснювала б при $x_A = const$ і $y_A = const$, тобто коли полюс A нерухомий. Це буде обертання фігури навколо полюса A .

Звідси можна зробити висновок, що в загальному випадку рух плоскої фігури в її площині можна розглядати як складений із поступального руху, при якому всі точки фігури рухаються так само, як полюс A , і із обертального руху навколо цього полюса.

Основними кінематичними характеристиками такого руху будуть швидкість і прискорення поступального руху, які дорівнюють швидкості та прискоренню полюса $\bar{V}_{пост} = \bar{V}_A$, $\bar{a}_{пост} = \bar{a}_A$, а також кутова швидкість W і кутове прискорення e обертального руху навколо полюса.

Значення цих характеристик у будь-який момент часу t можна знайти, скориставшись рівнянням (4.73). При вивченні руху можна в якості полюса обирати будь-яку точку фігури, при цьому кутова швидкість і кутове прискорення тіла від вибору полюса не залежать.

Швидкість точок плоскої фігури

Залежність між швидкостями точок плоскої фігури встановлюється наступною теоремою: *швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та обертальної швидкості цієї точки разом з тілом навколо полюса.*

Точку O , швидкість якої \bar{V}_O , оберемо полюсом. Визначимо швидкість будь-якої іншої точки плоскої фігури.

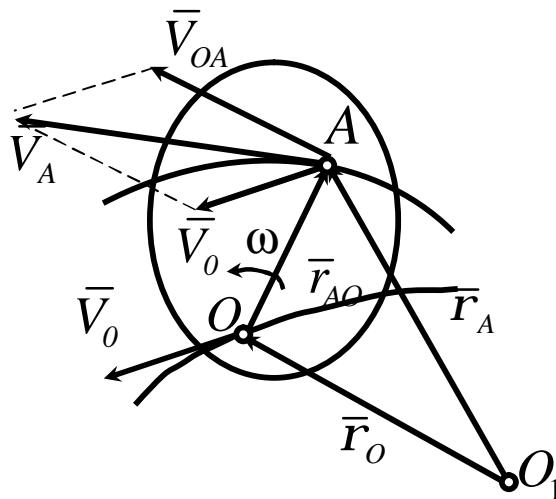


Рисунок 4.61

Для цього (рис. 4.61) проведемо із нерухомої точки площини O_1 до точок O і A радіус-вектори \bar{r}_O , \bar{r}_A і \bar{r}_{AO} із полюса O . Оскільки радіус-вектор \bar{r}_{AO} з'єднує дві точки плоскої фігури, то за весь час руху він обертається навколо полюса з кутовою швидкістю плоскої фігури \bar{W} , не змінюючись за модулем.

Під час руху між радіус-векторами зберігається залежність:

$$\bar{r}_A = \bar{r}_O + \bar{r}_{AO},$$

де модуль $|\bar{r}_{AO}| = \text{const}$.

Визначимо звідси швидкість точки A :

$$\bar{V}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AO}}{dt},$$

де $\frac{d\bar{r}_O}{dt} = \bar{V}_O$ - швидкість полюса O .

Оскільки під час руху плоскої фігури модуль радіус-вектора \bar{r}_{OA} залишається незмінним, а напрямок його при обертанні фігури змінюється,

то похідна $\frac{d\bar{r}_{AO}}{dt}$ є обертальною швидкістю точки A навколо полюса O ,

яку позначимо \bar{V}_{AO} :

$$\frac{d\bar{r}_{OA}}{dt} = \bar{V}_{AO}.$$

Обертальну швидкість \bar{V}_{AO} можна зобразити у вигляді векторного добутку вектора кутової швидкості плоскої фігури \bar{W} на радіус-вектор \bar{r}_{OA} :

$$\bar{V}_{OA} = \bar{W} \times \bar{r}_{AO}.$$

Обертальна швидкість \vec{V}_{OA} напрямлена перпендикулярно до відрізка OA , у бік обертання фігури, і має модуль

$$V_{AO} = OA \cdot \omega.$$

Після підстановки отримуємо

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO} \quad (4.74)$$

або

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AO} . \quad (4.75)$$

Швидкість точки A зображується діагоналлю паралелограма, відбудованого при точці A на швидкості полюса O (рис. 4.61).

Висновок 1. Проекції швидкостей точок плоскої фігури на вісь, що проходить через ці точки, рівні.

Вважатимемо, що в заданий момент часу відома швидкість \vec{V}_A точки A плоскої фігури, напрям її обертання і модуль кутової швидкості фігури ω (рис. 4.59).

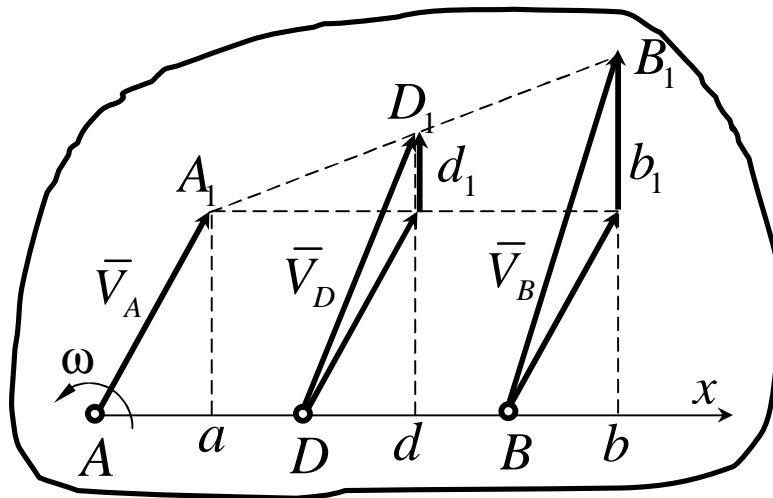


Рисунок 4.62

Оберемо точку A в якості полюса, визначимо швидкості точок B і D плоскої фігури, лежачих на одній прямій з точкою A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA},$$

причому обертальні швидкості цих точок навколо полюса A $\vec{V}_{BA} = \overline{b_1 B_1}$ і $\vec{V}_{DA} = \overline{d_1 D_1}$, напрямлені перпендикулярно до відрізків AB і AD у бік обертання фігури.

Проведемо вісь x через точки A, D і B і спроекуємо швидкості цих точок на вісь x . Тоді

$$V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}, \quad V_{Dx} = V_{Ax} + V_{DAx},$$

але $V_{BAx} = 0$ і $V_{DAx} = 0$, так як вектори V_{BA} і V_{DA} перпендикулярні до осі x . Тому

$$V_{Bx} = V_{Ax}; \quad Bb = Aa,$$

$$V_{Dx} = V_{Ax}; \quad Dd = Aa,$$

або
$$Aa = Bb = Dd.$$

Тобто проєкції швидкостей всіх точок відрізка AB на вісь x , напрямлені вздовж цього відрізка, рівні поміж собою.

Миттєвий центр швидкостей

Висновок 2. У загальному випадку для плоскої фігури існує така точка, швидкість якої дорівнює нулю. Така точка називається миттєвим центром швидкостей, і швидкості всіх точок розподіляються відносно неї як при простому обертанні.

Припустимо, що плоска фігура має дві точки A і B , швидкості яких відома (рис. 4.63). Відповідно до висновку 1 відрізки на прямій AB :

$$Aa = Bb.$$

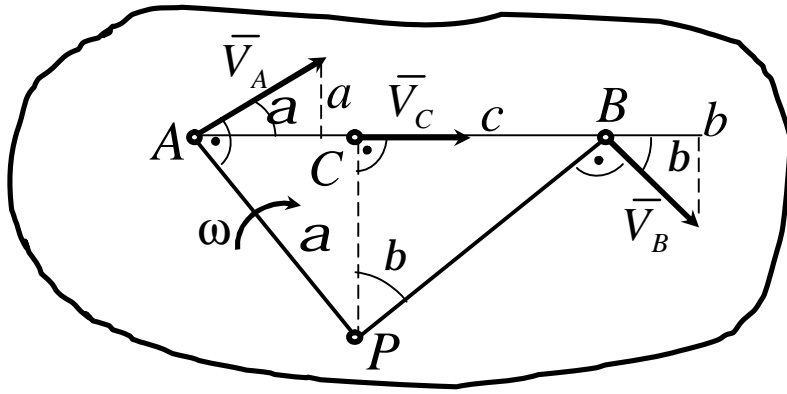


Рисунок 4.63

Проведемо перпендикуляри до векторів швидкостей точок A і B (\vec{V}_A і \vec{V}_B). Отримана точка перетину цих перпендикулярів – P і є миттєвим центром швидкостей. Швидкість цієї точки повинна дорівнювати нулю, оскільки вона також задовольняє висновку 1, бо

$$Aa = V_A \cos a, \quad Bb = V_B \cos b.$$

Тоді
$$V_A \cos a = V_B \cos b.$$

Якщо в якості полюса для визначення швидкостей точок A і B вибрати точку P , то

$$V_A = \omega AP, \quad V_B = \omega BP.$$

$$\omega AP \cos a = \omega BP \cos b = \omega CP.$$

Точка P є миттєвим центром швидкостей, отже і швидкість точки C :

$$V_C = \omega CP$$

відповідає умові $Aa = Bb = Cc$, тобто виконується висновок 1.

Наведені висновки спрощують визначення швидкостей точок або кутові швидкості плоского руху тіла.

Окремі випадки знаходження миттєвого центра швидкостей

1 Якщо швидкості двох точок плоскої фігури напрямлені в один бік і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує (рис. 4.64, а), то миттєвий центр швидкостей лежить у точці перетину зазначеної перпендикулярної прямої з прямою, яка з'єднує кінці векторів швидкостей певних точок.

2 Якщо швидкості двох точок плоскої фігури напрямлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що з'єднує ці точки, то миттєвий центр швидкостей лежить у точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей з наведеним вище відрізком (рис. 4.61, б).

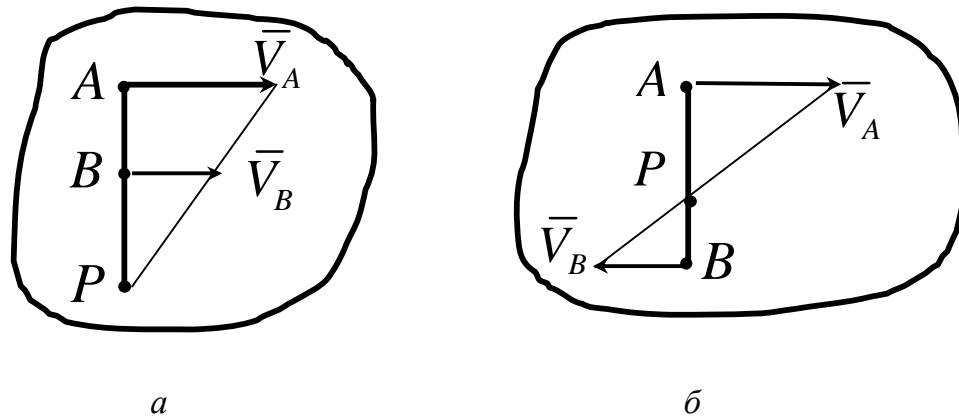


Рисунок 4.64

3 Якщо швидкості двох точок плоскої фігури паралельні та рівні між собою, то миттєвий центр швидкостей віддаляється на нескінченно велику відстань (рис. 4.65). У цьому разі відбувається миттєво-поступальний рух тіла.

4 У разі кочення без ковзання рухомого контуру плоскої фігури по нерухомому миттєвий центр скоростей лежить в точці дотику цих контурів (рис.4.66).

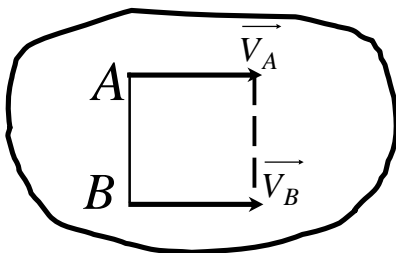


Рисунок 4.65

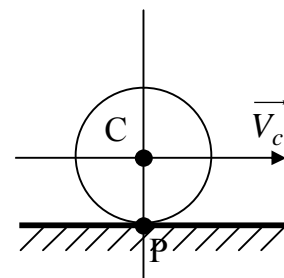


Рисунок 4.66

Розглянуті випадки знаходження центру миттєвих швидкостей приводять до такого висновку: плоска фігура, що рухається в своїй площині, в кожний момент здійснює або миттєво-обертальний, або миттєво-поступальний рух.

Прискорення точок тіла при плоскому русі

Використаємо теорему про додавання швидкостей точок плоскої фігури. На підставі формули (4.74) маємо

$$\bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_{OA}.$$

Прискорення точки A знайдемо як векторну похідну за часом від швидкості цієї точки:

$$\bar{a}_A = \frac{d\bar{V}_A}{dt} = \frac{d\bar{V}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{OA} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{OA}}{dt}.$$

Так як

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{e}$$

і

$$\frac{d\bar{r}_{OA}}{dt} = \bar{V}_{OA} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{OA}$$

маємо:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{e} \times \bar{r}_{OA} + \bar{\omega} \times \bar{V}_{OA}.$$

Тут $\bar{e} \times \bar{r}_{OA} = \bar{a}_{OA}^t$ – дотичне прискорення точки A в обертальному русі навколо полюса O ;

$\bar{\omega} \times \bar{V}_{OA} = \bar{a}_{OA}^n$ – нормальне прискорення точки A в обертанні навколо полюса O .

Тому

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{OA}^t + \bar{a}_{OA}^n \quad (4.76)$$

Якщо прискорення точки O не задано безпосередньо, і вона рухається за криволінійною траєкторією, то прискорення полюса (у даному випадку точки O) розкладається на дві складові. Тобто

$$\bar{a}_O = \bar{a}_O^t + \bar{a}_O^n.$$

Тоді рівняння (4.75) має вигляд:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O^t + \bar{a}_O^n + \bar{a}_{OA}^t + \bar{a}_{OA}^n. \quad (4.77)$$

У формулі (4.76)

$$\begin{aligned} a_{OA}^t &= OA \cdot e, \\ a_{OA}^n &= OA \cdot w^2. \end{aligned}$$

Оскільки $a_{OA}^t \perp a_{OA}^n$, то їх сума дорівнює

$$a_{OA} = \sqrt{(a_{OA}^t)^2 + (a_{OA}^n)^2} = OA \sqrt{e^2 + w^4}, \quad (4.78)$$

а також кут b

$$\operatorname{tg} b = \frac{a_{OA}^t}{a_{OA}^n} = \frac{e}{w^2}. \quad (4.79)$$

Питання для самоперевірки

- 1 Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним?
- 2 До вивчення руху якої фігури зводиться кінематика плоскопаралельного руху?

- 3 Як записуються кінематичні рівняння при плоско-паралельному русі твердого тіла?
- 4 Як визначити швидкість довільної точки тіла при плоско-паралельному русі?
- 5 Чому дорівнюють проекції швидкостей кінців сталого відрізка на його напрям?
- 6 Що таке миттєвий центр швидкостей плоскої фігури?
- 7 Які є способи визначення миттєвого центра швидкостей?
- 8 Якими будуть швидкості точок плоскої фігури у тому випадку, коли миттєвий центр швидкостей нескінченно віддаляється?
- 9 За яким законом розподіляються прискорення плоскої фігури?
- 10 Чи може прискорення миттєвого центра швидкостей дорівнювати нулю?

4.2.3.2 Умова задачі

На рисунку 4.67 наведені кінематичні схеми багатоланкових механізмів, у яких ведучою ланкою є кривошип O_1A , який обертається з постійною кутовою швидкістю W_0 . Розміри ланок механізму: кривошипів O_1A і O_2B відповідно $l_1 = 0,4$ м, $l_3 = 0,6$ м; шатуна AB - $l_2 = 0,6$ м.

Для заданого моменту часу t_1 необхідно побудувати геометричну конфігурацію, яку займає механізм і визначити для цього положення кінематичні характеристики окремих його ланок і точок графоаналітичним (побудовою) і аналітичним (розрахунком) способами (табл. 4.11).

ВКАЗІВКА. При рішенні задачі для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок варто скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла або поняттям про миттєвий центр швидкостей.

При визначенні прискорень точок ланок, які здійснюють плоский рух, необхідно користуватися векторним рівнянням (4.76), де в якості полюса вибирається точка, прискорення якої або задано, або безпосередньо визначається за умовами задачі. (точка A рухається дугою кола, і її прискорення визначається як геометрична сума $\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n$).

Таблиця 4.11 (до рис.4.64 (В.0-4))

Номер варіанта	Кут, град				Дано		Знайти			
	a	b	g	q	$w_1,$ 1/с	$w_3,$ 1/с	V точки	ω ланки	a точки	ε ланки
0	0	60	30	120	6	—	В	АВ	В	АВ
1	90	120	150	30	—	4	А	АВ	А	АВ
2	30	60	30	120	5	—	В	АВ	В	АВ
3	60	150	150	30	—	5	А	АВ	А	АВ
4	30	30	60	150	4	—	В	АВ	В	АВ
5	90	120	120	60	—	6	А	АВ	А	АВ
6	90	150	120	30	3	—	В	АВ	В	АВ
7	0	60	60	120	—	2	А	АВ	А	АВ
8	60	150	120	30	2	—	В	АВ	В	АВ
9	30	120	150	60	—	8	А	АВ	А	АВ

Таблиця 4.12 (к рис.4.64(В.5-9))

Номер варіанта	Кут, град				Дано				Знайти			
	a	b	j	q	$w_1,$ 1/с	$e_1,$ 1/с ²	$V_B,$ м/с	$a_B,$ м/с ²	V точки	ω ланки	a точки	ε ланки
0	120	30	90	150	2	4	—	—	В	АВ	В	АВ
1	0	60	0	120	—	—	4	6	А	АВ	А	АВ
2	60	150	90	30	3	5	—	—	В	АВ	В	АВ
3	0	150	0	60	—	—	6	8	А	АВ	А	АВ
4	30	120	0	60	4	6	—	—	В	АВ	В	АВ
5	90	120	90	60	—	—	8	10	А	АВ	А	АВ
6	0	150	0	120	5	8	—	—	В	АВ	В	АВ
7	30	120	0	60	—	—	2	5	А	АВ	А	АВ
8	90	120	90	150	6	10	—	—	В	АВ	В	АВ
9	60	60	90	30	—	—	5	4	А	АВ	А	АВ

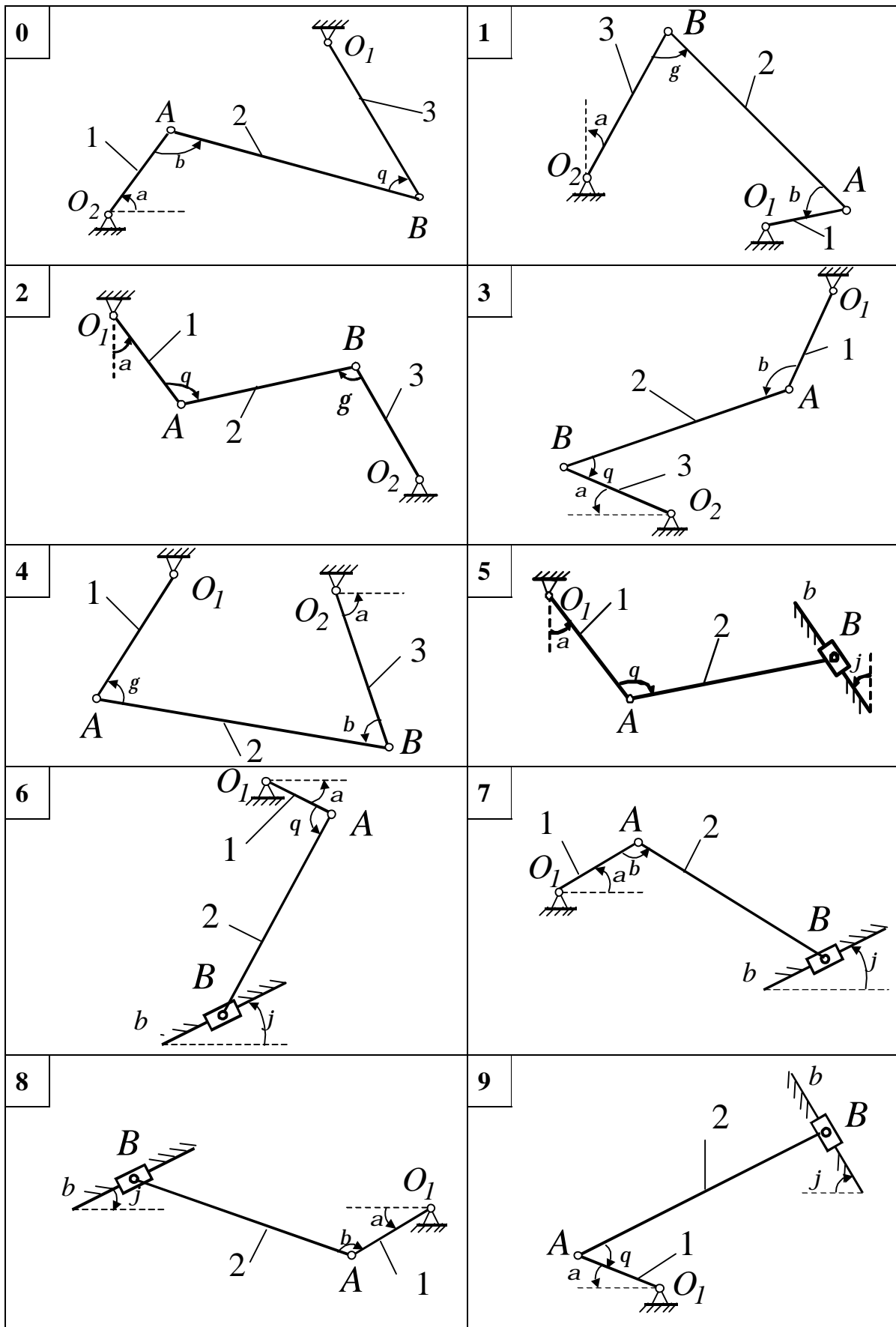


Рисунок 4.67

4.2.3.3 Приклади рішення задачі КЗ

Приклад 1

Кривошип OA шарнірного чотириланковика $OABO_1$ обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 .

Дано: $OA=50$ см, $AB=100$ см, $\omega_0=5$ с⁻¹, $\varphi=90^\circ$.

Знайти: кутову швидкість, кутове прискорення шатуна AB і куліси O_1B , а також швидкість і прискорення шарніру B у положенні механізму, який зображено на рисунку 4.68.

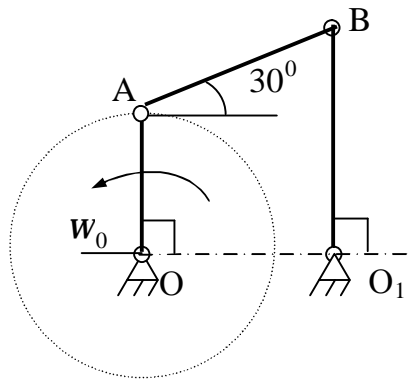


Рисунок 4.68

Розв'язання

1 Визначаємо швидкість шарніра A . За даними задачі, враховуючи напрямок кутової швидкості кривошипа, можна знайти величину і напрямок вектора швидкості \vec{V}_A .

$$V_A = \omega_0(OA) = 5 \cdot 50 = 250 \text{ (см/с)}.$$

2 Напрямок швидкості точки B знайдемо, врахувавши, що точка B одночасно належить до куліси O_1B , яка здійснює обертальний рух. Вектор \vec{V}_B напрямлений перпендикулярно кулісі O_1B . Відновлюючи перпендикуляр до \vec{V}_A і \vec{V}_B , знаходимо положення миттєвого центра

швидкостей для шатуна АВ. Оскільки перпендикуляри до \vec{V}_A і \vec{V}_B паралельні, миттєвий центр швидкостей знаходиться у нескінченності, а шатун АВ у даний момент часу здійснює миттєво поступальний рух. Швидкості точок $V_A = V_B$, а $\omega_{AB} = 0$. Так як $V_B = 250$ см/с, то можна знайти кутову швидкість куліси ω_{O_1B} :

$$\omega_{O_1B} = V_B / O_1B = 250 / 100 = 2,5 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

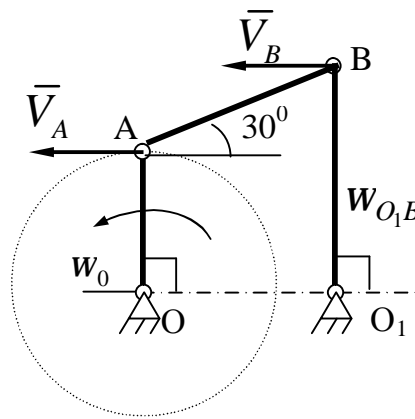


Рисунок 4.69

3 Визначення прискорення шарніра В:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n$$

Так як кривошип ОА обертається з постійною кутовою швидкістю, то $a_A = a_A^n$.

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

Тоді
$$\vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1)$$

Знаходимо модуль a_B^n .

$$a_B^n = w_{O_1 B}^2 (BO_1) = 2,5^2 \cdot 100 = 625 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор \bar{a}_B^n напрямлений вздовж осі куліси до шарніра O_1 (см. рис.4.70).

Вектор прискорення \bar{a}_B^t напрямлений перпендикулярно \bar{a}_B^n . Припустимо, що \bar{a}_B^t напрямлений вправо (см. рис. 4.70). Модуль \bar{a}_B^t дорівнює

$$\bar{a}_B^t = e_{O_1 B} (O_1 B) \quad (2)$$

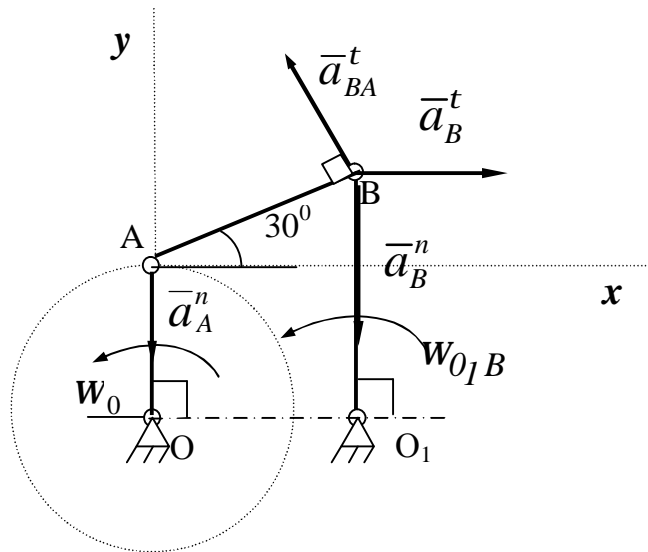


Рисунок 4.70

Вектор \bar{a}_A^n спрямований вздовж осі до точки O. Модуль \bar{a}_A^n дорівнює

$$a_A^n = w_0^2 (OA) = 5^2 \cdot 50 = 1250 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Модуль \bar{a}_{BA}^n дорівнює

$$a_{BA}^n = w_{AB}^2 \cdot (AB), \text{ так як } w_{AB} = 0, \text{ то } a_{BA}^n = 0.$$

Вектор \bar{a}_{BA}^t спрямований перпендикулярно осі шатуна AB , припустимо вгору.

Модуль \bar{a}_{BA}^t визначається з рівняння

$$\bar{a}_{BA}^t = e_{AB}(AB) \quad (3)$$

У векторному рівнянні (1) дві невідомі \bar{a}_B^t і \bar{a}_{BA}^t . Ці невідомі можна знайти, якщо спроектувати векторне рівняння (1) на координатні осі, що зазначені на рисунку 4.70.

$$\text{На вісь } Ax: a_B^t = -a_{BA}^t \cdot \sin 30^\circ \quad (4)$$

$$\text{На вісь } Ay: -a_B^n = -a_A^n + a_{BA}^t \cdot \cos 30^\circ \quad (5)$$

З рівняння (5) знаходимо a_{BA}^t .

$$a_{BA}^t = (a_A^n - a_B^n) / \cos 30^\circ = (1250 - 625) / 0,866 = 721,7 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Тоді, з рівняння (4) знаходимо a_B^t

$$a_B^t = -a_{BA}^t \cdot \sin 30^\circ = -721,7 \cdot 0,5 = -360,85 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

З рівнянь (2) і (3) знаходимо прискорення куліси O_1B і шатуна AB :

$$e_{O_1B} = a_B^t / (O_1B) = 360,85 / 100 = 3,6 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

$$e_{AB} = a_{BA}^t / (AB) = 721,7 / 100 = 7,22 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Знайдемо прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{360,85^2 + 625^2} = 721,69 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\omega_{AB} = 0$; $e_{AB} = 7,22 \text{ с}^{-2}$; $w_{O_1B} = 2,5 \text{ с}^{-1}$;

$e_{O_1B} = 3,6 \text{ с}^{-2}$; $a_B = 721,69 \text{ м/с}^2$.

Приклад 2

У кривошипно-шатунному механізмі (рис.4.71) задані кутова швидкість і прискорення кривошипа OA , а також розміри його ланок.

Дано: $OA=25$ см, $AB = 80$ см, $AC=20$ см, $\omega_{OA} = 1$ с⁻¹, $\epsilon_{OA} = 1$ с⁻².

Знайти: швидкість і прискорення точок B і C .

Розв'язання

Швидкість пальця A кривошипа OA визначається:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA;$$

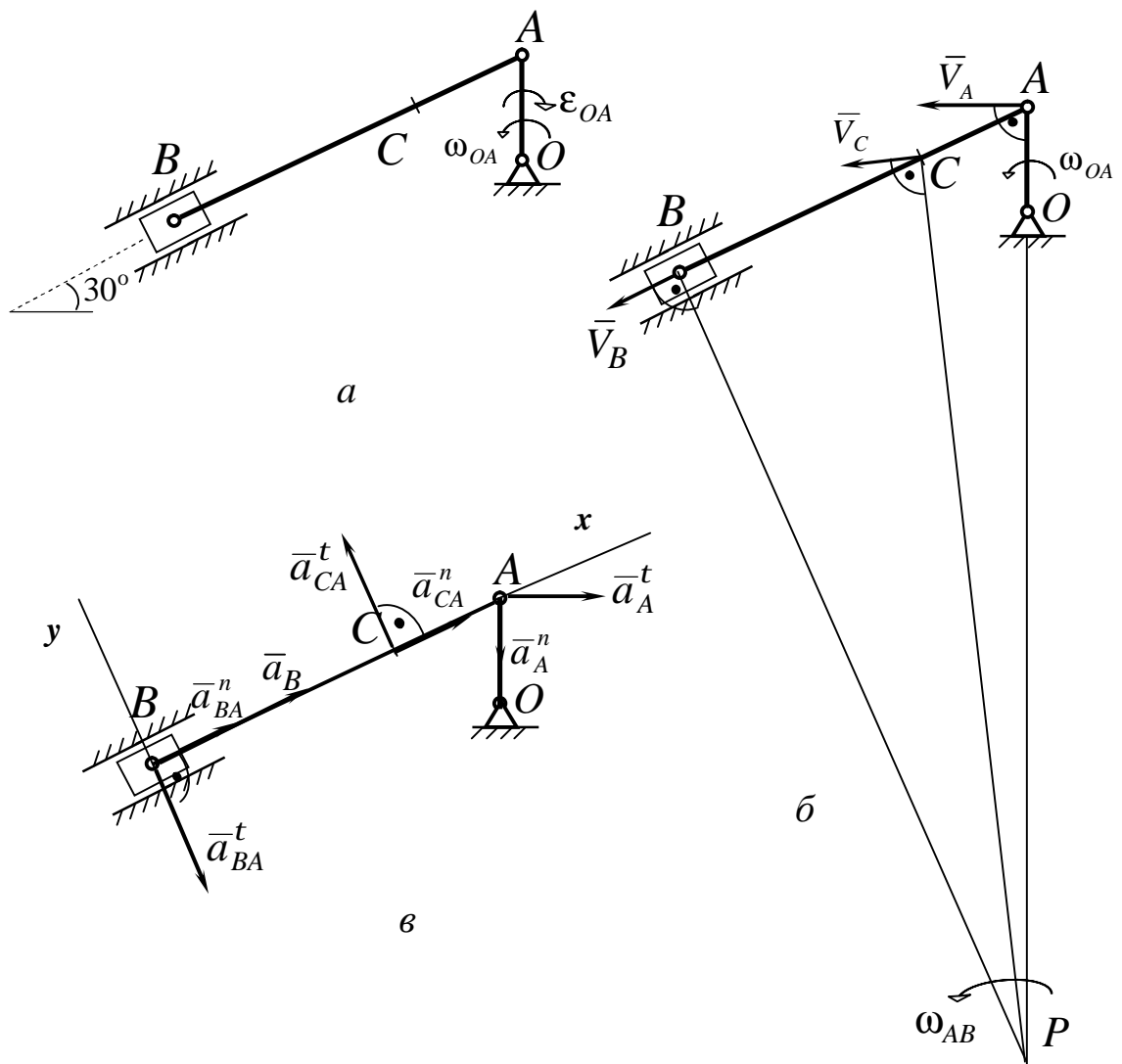


Рисунок 4.71

$V_A = 25$ см/с. Вектор швидкості точки А перпендикулярний до кривошипа ОА.

Швидкість повзуна В спрямована вздовж напрямних за АВ. Миттєвий центр швидкостей Р шатуна АВ знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з А та В до їхніх швидкостей.

$$\text{з } \triangle ABP: AP = 2AB; AP = 160 \text{ (см)}; BP = AP \cdot \sin 60^\circ; \\ BP = 138,5 \text{ (см)}.$$

$$\text{з } \triangle CBP: CP = \sqrt{(AB - AC)^2 + BP^2} = 150,1 \text{ (см)}.$$

$$\text{Кутова швидкість ланки } AB: \omega_{AB} = V_A / AP; \omega_{AB} = 0,16 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Модулі швидкостей точок В і С:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP; V_B = 22,1 \text{ (см/с)};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP; V_C = 24 \text{ (см/с)}.$$

$$\text{Прискорення точки А: } \bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n; \bar{a}_A^t = \mathbf{e}_{OA} \cdot OA;$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Згідно з теоремою про прискорення точок плоскої фігури:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^t + \bar{a}_{AB}^n;$$

$$a_A^n = 50 \text{ (см/с}^2\text{)}; \quad a_A^t = 25 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB; \quad a_{AB}^t = 1,95 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Нехай вісь x проходить вздовж АВ, а вісь y перпендикулярно їй через точку В.

Вектор \bar{a}_A^n направлений від А до О. Вектор \bar{a}_A^t перпендикулярний \bar{a}_A^n і направлений від В до А.

Для \bar{a}_B і \bar{a}_{AB}^t відомі тільки лінії їхньої дії:

\bar{a}_B – вздовж напрямних повзуна, \bar{a}_{AB}^t – перпендикулярний АВ.

Задамо їм довільний напрям за зазначеними лініями. Ці прискорення визначаються з рівнянь проєкцій векторної рівності на обрані осі координат.

$$\text{На вісь } Ox : a_B = a_A^t \cdot \cos 30^\circ - a_A^n \cdot \cos 60^\circ + a_{AB}^n ;$$

$$a_B = 32,45 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

$$\text{На вісь } Oy : 0 = -a_A^t \cdot \cos 60^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^t ;$$

$$a_{BA}^t = -55,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Знайдемо кутове прискорення шатуна АВ:

$$e_{AB} = \frac{|a_{AB}^t|}{AB} ; e_{AB} = 0,7 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Прискорення точки С визначається:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AC}^t + \bar{a}_{AC}^n ; a_{AC}^t = e_{AB} \cdot AC ;$$

$$a_{AC}^t = 11,6 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{AC}^n = w_{AB}^2 \cdot AC ; a_{AC}^n = 0,49 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Спроєкуємо це рівняння на осі x і y :

$$a_{Cx} = a_A^t \cdot \cos 30^\circ + a_A^n \cdot \cos 60^\circ + a_{AC}^n ; a_{Cx} = 31 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{Cy} = a_A^t \cdot \cos 60^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_{AC}^t ;$$

$$a_{Cy} = -41,8 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} ; a_C = 52,04 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $V_B = 22,1 \text{ см/с}$; $V_C = 24 \text{ см/с}$; $a_B = 32,45 \text{ см/с}^2$;
 $a_C = 52,04 \text{ см/с}^2$.

Приклад 3

Кривошип OA нецентрального кривошипно-шатунного механізму обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкістю ω_0 і кутовим прискоренням ϵ_0 і викликає рух шатуна AB , з'єднаний з ним шарнірно в точці A . Повзун B переміщується за нахиленими напрямними mn .

Дано: $OA = 10\text{ см}$, $AB = 55\text{ см}$, $\omega_0 = 2\text{ с}^{-1}$, $\epsilon_0 = 4\text{ с}^{-2}$.

Знайти: прискорення повзуна B і кутове прискорення шатуна AB в той момент, коли $\angle ABn = 60^\circ$ і $AB \perp OA$ (рис.4.72).

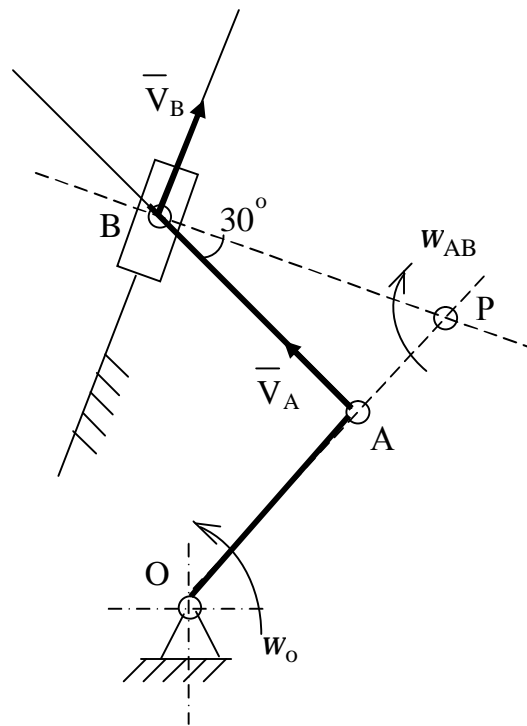


Рисунок 4.72

Розв'язання

Оскільки рух кривошипа OA задано, то можна знайти швидкість і прискорення точки A . Вектор \vec{V}_A перпендикулярний до OA і за модулем дорівнює

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20(\text{см/с}).$$

Вектор прискорення \bar{a}_A складається із дотичного прискорення \bar{a}_A^t , спрямованого вздовж AB , і нормального прискорення \bar{a}_A^n , спрямованого вздовж кривошипа OA від A до O , тобто

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n,$$

причому

$$a_A^n = w_0^2 \cdot OA = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_A^t = \varepsilon_0 \cdot OA = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Повзун B рухається поступально і прямолінійно, отже вектори \bar{V}_B і \bar{a}_B спрямовані за прямою mn . З іншого боку точка B належить шатуна AB , який рухається в площині рисунка. Оберемо в цьому русі точку A за полюс:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n.$$

Для визначення модуля складової прискорення точки B - \bar{a}_{BA}^n , треба знайти кутову швидкість шатуна AB . Кутову швидкість w_{AB} знайдемо за допомогою миттєвого центра швидкостей (рис. 4.72)

$$V_A = w_{AB} \cdot AP$$

звідки

$$w_{AB} = \frac{V_A}{AP}$$

$$V_A = 20 \text{ (см/с)}, AP = AB \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 31,8 \text{ (см)}$$

$$w_{AB} = \frac{20}{31,8} = 0,63 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

Тоді

$$a_{AB}^n = w_{AB}^2 \cdot AB = 0,63^2 \cdot 55 = 21,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Напрямки складових вектора прискорення точки В відомі (див. рис. 4.72).

Прискорення точки В і кутове прискорення шатуна AB можна знайти розв'язанням векторного рівняння для знаходження прискорення. Для цього спроектуємо його на осі x і y (рис. 4.72).

На вісь Ax :

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^t - a_{BA}^n,$$

звідки

$$a_B = \frac{a_A^t - a_{BA}^n}{\cos 60^\circ} = \frac{40 - 21,8}{0,5} = 36,4 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

На вісь Ay :

$$a_B \cos 30^\circ = -a_{BA}^n + a_A^t$$

Звідки

$$a_{BA}^t = a_B \cos 30 + a_A^n = 36,4 \cdot 0,866 + 40 = 71,5 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

$$a_{BA}^t = e_{AB} \cdot AB$$

$$e_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \frac{71,5}{55} = 1,3 \text{ (с}^{-2}\text{)}$$

Відповідь: $a_B = 36,4 \text{ см/с}^2$, $e_{AB} = 1,3 \text{ с}^{-2}$.

Приклад 4

У механізмі, зображеному на рис. 4.73, кривошип OA обертається зі сталою швидкістю W в площині рисунка навколо нерухомої точки O і при допомозі стрижня AB викликає рух кривошипа BC , який обертається в тій же площині навколо нерухомої точки C .

Дано: $OA = 25 \text{ см}$, $AB = BC = 50 \text{ см}$, $W = 2 \text{ с}^{-1}$.

Знайти: швидкість і прискорення точки B в той момент, коли кривошип OA горизонтальний, $\angle OAB = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$.

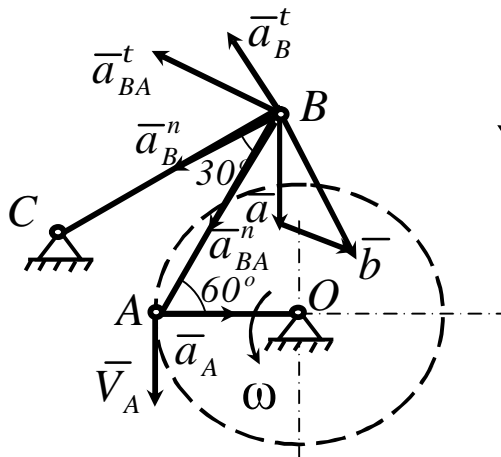


Рисунок 4.73

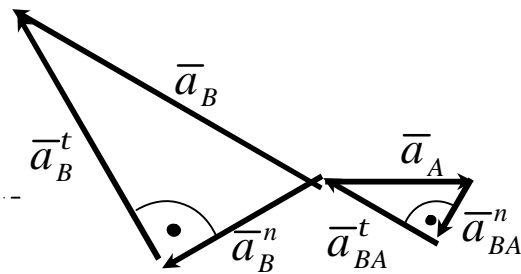


Рисунок 4.74

Розв'язання

Знайдемо спочатку швидкість точки A – \bar{V}_A і прискорення \bar{a}_A точки A ланки OA , рух якої заданий. Вектор \bar{V}_A перпендикулярний до OA і за модулем дорівнює $V_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 25 = 50$ (см/с). Оскільки кривошип OA обертається рівномірно, то прискорення \bar{a}_A спрямоване вздовж OA і притому

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 4 \cdot 25 = 100 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Точка B належить ланці BC , яка обертається навколо нерухомої точки C , отже траєкторією точки B є дуга кола з центром у точці C і радіусом CB . Тому \bar{V}_B і \bar{a}_B^t спрямовані за однією прямою, перпендикулярною до BC , а вектор \bar{a}_B^n спрямований вздовж BC і за модулем дорівнює $a_B^n = V_B^2 / BC$. Крім того,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^t + \bar{a}_B^n.$$

З іншого боку, точка належить ланці BC , візьмемо точку A полюсом плоского руху, і за формулами-теоремами про додавання швидкостей і прискорень:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n,$$

де вектори \bar{V}_{BA} і \bar{a}_{BA}^t мають однаковий напрямок – за прямою, перпендикулярною до AB , а вектор \bar{a}_{BA}^n спрямуємо вздовж BA , притому

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{AB}.$$

До того, як перейти до визначення прискорень, слід знайти \overline{V}_B і \overline{V}_{BA} . Для цього відбудуємо відповідно теоремі про додавання швидкостей трикутник швидкостей точки B . Тоді

$$\overline{Ba} = \overline{V}_A, \overline{ab} = \overline{V}_{BA}, \overline{Bb} = \overline{V}_B,$$

причому

$$\begin{aligned} \angle Bba &= \angle ABC = 30^\circ, \\ \angle aBb &= 90^\circ - \angle CBO = 30^\circ. \end{aligned}$$

звідки

$$Ba = ab,$$

тобто

$$V_{BA} = V_A = 50 \text{ м/с},$$

$$V_B = Bb = 2Ba \cdot \cos 30^\circ = V_A \sqrt{3} = 50\sqrt{3} \text{ (см/с)}.$$

Отже

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{BC} = \frac{3V_A^2}{BC} = 150 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{AB} = 50 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Численне значення векторів \overline{a}_B^t , \overline{a}_B , \overline{a}_{BA}^t отримаємо методом проєкцій. Для цього запишемо векторне рівняння для точки B , яка належить ланці CB :

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^t + \overline{a}_B^n,$$

а потім запишемо векторне рівняння для точки B , яка належить ланці AB :

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n.$$

Прирівняємо праві частини обох рівнянь. Тоді

$$\overline{a}_B^t + \overline{a}_B^n = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n.$$

Спроектуємо це рівняння на прями BA і BC , отримаємо:

$$a_B^t \cos 60^\circ - a_B^n \cos 30^\circ = a_A \cos 60^\circ - a_{BA}^n,$$

$$a_B^n = \bar{a}_A \cos 30^\circ + a_{BA}^n \cos 30^\circ + a_{BA}^t \cos 60^\circ.$$

Таким чином маємо:

$$a_B^t = a_A - 2a_{BA}^n + a_B^n \sqrt{3} = 150\sqrt{3} \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_{BA}^t = \sqrt{3}a_A + 2a_B^n - a_{BA}^n \sqrt{3} = (300 + 50\sqrt{3}) \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = 300 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

На рисунку 4.74 показаний план прискорень, відбудований за допомогою двох векторних рівнянь відповідно теоремі про додавання прискорень при плоскому русі тіла.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^t + \bar{a}_{BC}^n.$$

Оскільки $\bar{a}_C = 0$, вектори \bar{a}_{BC}^n і \bar{a}_{BC}^t позначені як \bar{a}_B^n і \bar{a}_B^t .

Відповідь: $V_B = 50\sqrt{3}$ см/с, $a_B = 300$ см/с².

4.2.4 ЗАДАЧА К4. Визначення абсолютної швидкості і абсолютного прискорення точки при складному русі

ВКАЗІВКА 1. Задача К4 – на складний рух точки.

4.2.4.1 Стислі відомості з теорії кінематики складного руху точки.

Складний рух точки

Якщо об'єкт здійснює водночас не один, а декілька рухів, то такий рух об'єкта називається складеним або складним.

Детальніше розглянемо складний рух на прикладі складного руху однієї точки, яка може рухатись сама по собі або може здійснювати складний рух.

При розгляді складного руху точки в загальному випадку необхідно розглянути змінення векторів з течією часу у відношенні до систем відліку, які рухаються одна відносно іншої.

Нерухомою системою відліку вважається система, рух якої відносно інших систем відліку не розглядається.

Абсолютна і відносна похідні від вектора. Формула Бура

Введемо позначення похідних від вектора при змінненні його відносно різних систем відліку, які рухаються одна відносно іншої.

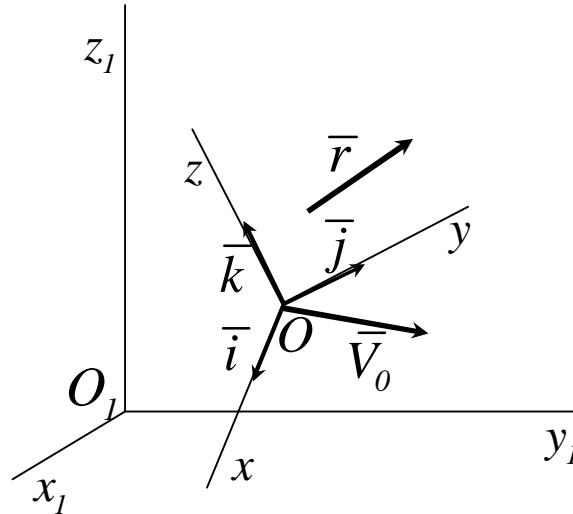


Рисунок 4.75

Для будь-якого вектора $\bar{r}(t)$ (рис. 4.75), його похідну за часом у відношенні до нерухомої системи відліку називають **повною** або **абсолютною** похідною і позначають $\frac{d\bar{r}}{dt}$. Похідну за часом при врахуванні зміни вектора \bar{r} відносно рухомої системи відліку називають **відносною** або **локальною** похідною і позначають $\frac{d\bar{r}}{dt}$.

Установимо залежність між відносною та абсолютною похідними за часом вектора \bar{r} і величинами, що характеризують рух рухомої системи відліку відносно нерухомої. Для цього розкладемо вектор \bar{r} на складові, паралельні осям рухомої системи координат.

$$\bar{r} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k} . \tag{4.80}$$

Підрахуємо повну похідну за часом від вектора \bar{r} , використовуючи формулу (4.80). Отримаємо:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \bar{i} + \frac{dr_y}{dt} \bar{j} + \frac{dr_z}{dt} \bar{k} + r_x \frac{d\bar{i}}{dt} + r_y \frac{d\bar{j}}{dt} + r_z \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (4.81)$$

Перші три доданки враховують змінення вектора \bar{r} при незмінних \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} і тому складають відносну похідну, тобто

$$\frac{\%}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \bar{i} + \frac{dr_y}{dt} \bar{j} + \frac{dr_z}{dt} \bar{k}. \quad (4.82)$$

Похідні за часом від одиничних векторів визначаються за формулами Пуассона:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{w} \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{w} \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{w} \times \bar{k}. \quad (4.83)$$

Підставимо значення похідних формул (4.82), (4.83) у (4.81) і винесемо \bar{w} за дужки, отримаємо:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\%}{dt} + \bar{w} \times (r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}).$$

або з урахуванням формули (4.80)

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\%}{dt} + \bar{w} \times \bar{r}. \quad (4.84)$$

Отримана формула (4.84) називається **формулою Бура**.

Додавання швидкостей точки

Якщо $O_1 x_1 y_1 z_1$ – нерухома система осів координат, $Oxyz$ – рухома (рис. 4.76), то, як відомо, **абсолютним** рухом точки називають її рух відносно нерухомої системи осів координат, а **відносним** – її рух відносно рухомої.

Переносним рухом точки називають її рух разом з рухомою системою осів координат відносно нерухомих. Відносні швидкість і прискорення позначають \bar{V}_r і \bar{a}_r , переносні – \bar{V}_e і \bar{a}_e , абсолютні – \bar{V} і \bar{a} .

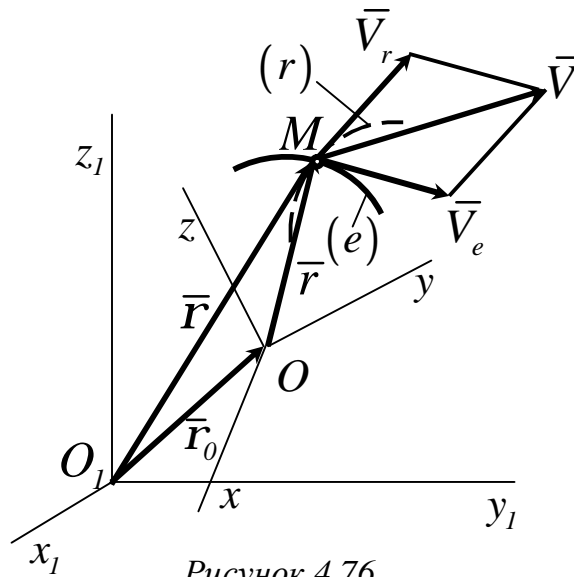


Рисунок 4.76

Отримаємо теорему додавання швидкостей для довільного моменту часу

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r} . \quad (4.85)$$

Знайдемо похідну за часом від (4.85). Отримаємо:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} . \quad (4.86)$$

За визначенням:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} \quad \text{– абсолютна швидкість точки } M ,$$

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{V}_0 \quad \text{– абсолютна швидкість точки } O .$$

Для обчислення $\frac{d\bar{r}}{dt}$ скористаємось формулою Бура (4.84). Похідна

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}_r$ – відносна швидкість точки M , а \bar{W} – кутова швидкість

обертання рухомої системи відліку. Таким чином, із (4.86) отримуємо

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{W} \times \bar{r} + \bar{V}_r, \quad (4.87)$$

де $\bar{V}_0 + \bar{W} \times \bar{r} = \bar{V}_e$ – переносна швидкість точки M . Із (4.87)

отримуємо теорему додавання швидкостей точки:

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (4.88)$$

Додавання прискорень точки

Абсолютне прискорення точки визначимо обчисленням повної похідної за часом від абсолютної швидкості (4.87). Маємо:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{V}_0 + \bar{W} \times \bar{r} + \bar{V}_r) = \frac{d\bar{V}_0}{dt} + \frac{d\bar{W}}{dt} \times \bar{r} + \bar{W} \times \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\bar{V}_r}{dt}.$$

Для повних похідних від векторів \bar{r} і \bar{V}_r застосовуємо формулу Бура. Отримаємо:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{W} \times \bar{r}, \quad \frac{d\bar{V}_r}{dt} = \frac{d\bar{V}_r}{dt} + \bar{W} \times \bar{r}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \bar{a}_0, \quad \frac{d\bar{W}}{dt} = \bar{e}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}_r, \quad \frac{d\bar{V}_r}{dt} = \bar{a}_r,$$

отримаємо для абсолютного прискорення

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{W} \times (\bar{W} \times \bar{r}) + \bar{a}_r + 2(\bar{W} \times \bar{V}_r). \quad (4.89)$$

У формулі (4.89) перші три доданки складають прискорення точки твердого тіла в загальному випадку його руху разом з рухомою системою осів координат відносно нерухомої, \bar{a}_0 – прискорення точки O , $\bar{e} \times \bar{r}$ і $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$ – відповідно обертальне (дотичне) і нормальне прискорення точки M , як би вона рухалась тільки разом з рухомою системою осів координат, не маючи у даний момент часу відносного руху. Після цього (4.89) набуває вигляду:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (4.90)$$

У тому випадку, коли переносний і відносний рухи точки мають криволінійні траєкторії, то

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^t \quad \text{і} \quad \bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^t.$$

Тоді рівняння (4.90) буде мати вигляд:

$$\bar{a} = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^t + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^t + \bar{a}_k. \quad (4.91)$$

У рівняннях (4.90) і (4.91) прискорення \bar{a}_k називається **прискоренням Коріоліса**. Воно визначається формулою

$$\bar{a}_k = 2(\bar{w} \times \bar{V}_r). \quad (4.92)$$

Співвідношення (4.90) і (4.91) формулюють теорему додавання прискорень точки або кінематичну теорему Коріоліса.

Прискорення Коріоліса

Розглянемо прискорення Коріоліса і його властивості. Воно визначається формулою (4.92). Модуль прискорення Коріоліса визначається відповідно формулі (4.92) виразом

$$a_k = 2w \cdot V_r \cdot \sin(\bar{w}_e, \bar{V}). \quad (4.93)$$

Для спрямування прискорення Кориоліса використаємо правило векторного добутку, згідно з яким вектор, що дорівнює векторному добутку двох інших векторів, перпендикулярний площині, в якій знаходяться ці два вектори, і спрямований так, що з його кінця оберт від першого вектора добутку до другого через менший з кутів, видно проти ходу годинникової стрілки.

Пояснимо це правило векторного добутку на конкретних прикладах для визначення напрямку прискорення Кориоліса.

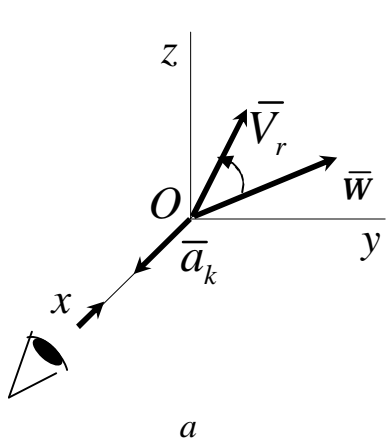


Рисунок 4.77

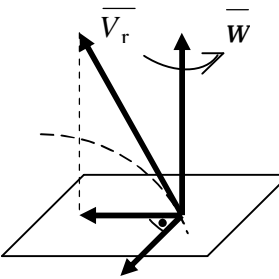
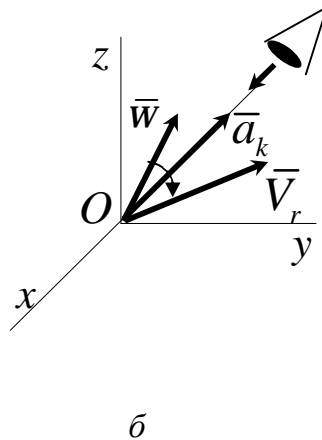


Рисунок 4.78

На рисунках 4.77,а і 4.77,б вектори \vec{w} і \vec{V}_r розташовані в площині Oyz . Тому прискорення Кориоліса, яке перпендикулярне цій площині, спрямовано вздовж осі x .

На рисунку 4.77,а коротший оберт вектора \vec{w} до сумісності з вектором \vec{V}_r спостерігається проти ходу годинникової стрілки з додатного напрямку вісі x . Тому вектор \vec{a}_k має напрямок, що збігається з напрямком вісі, а на рисунку 4.77,б навпаки.

Для спрямування прискорення Кориоліса застосовується також правило Жуковського (рис. 4.78). Для цього відносну швидкість \vec{V}_r проєктують на площину, яка перпендикулярна вектору \vec{w} і обертають проєкцію вектора \vec{V}_r на прямий кут навколо вектора \vec{w} в бік обертання тіла.

Розглянемо випадки, коли прискорення Кориоліса дорівнює нулю, які впливають із рівняння (4.93):

- 1 Якщо $W_e = 0$, тобто переносний рух є поступальним.
- 2 Якщо $V_r = 0$, тобто в ті моменти часу, коли змінюється напрямок відносного руху.
- 3 Якщо $\sin(\overline{W}_e, \overline{V}_r) = 0$, тобто коли швидкість відносного руху \overline{V}_r паралельна вектору кутової швидкості переносного обертання.

Питання для самоперевірки

- 1 Який рух точки називається абсолютним?
- 2 Який рух точки називається відносним?
- 3 Який рух точки називається переносним?
- 4 Які застосовують системи координат для дослідження складного руху точки?
- 5 Як визначити швидкості точок, що мають складний рух?
- 6 Як побудувати вектор відносної швидкості?
- 7 Як визначити прискорення точок, що здійснюють складний рух, в тому випадку, коли переносний рух поступальний?
- 8 Як визначити прискорення точка в тому разі, коли переносний рух обертальний?
- 9 Як визначити за величиною і напрямом прискорення Кориоліса?
- 10 У яких випадках прискорення Кориоліса дорівнює нулю?
- 11 Як можна легко визначити напрям прискорення Кориоліса, коли вектор \overline{W} перпендикулярний до вектора \overline{V}_r ?

4.2.4.2 Умова задач

Прямокутна пластина або кругла пластина обертається навколо нерухомої осі за законом заданому в таблиці 4.13.

Додатній напрям відліку кута j показано на рисунку 4.79 дуговою стрілкою. На схемах 0,1,2,3,4,5,6, вісь обертання перпендикулярна площині пластини (пластина обертається в просторі).

По пластині вздовж прямої або колом рухається точка М; закон її відносного руху заданий у таблиці 4.13 окремо для схем 0...4 і для схем 5...9; там же задані розміри a і l , $R=1м$.

На рисунках точка М показана в положенні, при якому $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка М знаходиться по іншу сторону від точки А).

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки М у момент часу $t_1 = 1с$.

Таблиця 4.13 (схеми 0 – 4)

Варіант	Рівняння обертання тіла D $j_e = f_1(t), рад$	Рівняння відносного руху точки М $OM = S_r = f_2(t), см$	$t_1, с$	$a, см$
0	$4t - t^2$	$50(3t - t^2) - 80$	1	20
1	$3t - 0,5t^3$	$40(3t^2 - t^4) - 60$	1	30
2	$2(t + t^2)$	$80(t^2 - t) + 30$	1	40
3	$2t - 3t^2$	$60(t^4 - 3t^2) + 145$	1	30
4	$t^3 - 0,5t^2$	$80(t^2 - t^3) - 18$	1	20
5	$4t^2 - t$	$40(t^2 - 2t^3)$	1	45
6	$4(t^2 - t^3)$	$40(t^2 - 3t) + 65$	1	30
7	$t^2 - 4t$	$60(t - t^3) + 30$	1	35
8	$4t^3 + t^2$	$50(t^3 - t) + 20$	1	25
9	$4t - 2t^3$	$40(t - 2t^3) + 70$	1	35

Продовження таблиці 4.13 (схеми 5 – 9)

Варіант	Рівняння обертання тіла D $j_e = f_1(t), \text{ рад}$	Рівняння відносного руху точки M $OM = S_r = f_2(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	l
0	$3t - 0.5t^3$	$40p \cos \frac{p}{3}t$	1	$\frac{4}{3}R$
1	$4t - t^2$	$60p \sin \frac{p}{6}t$	1	$1.5R$
2	$2t - 3t^2$	$20p \cos \frac{p}{3}t$	1	$2R$
3	$2(t+t^2)$	$40p \sin \frac{p}{3}t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}R$
4	$4t^2 - t$	$30p \cos \frac{2p}{3}t$	$\frac{1}{2}$	$1.5R$
5	$t^3 - 0.5t^2$	$20p \sin \frac{5p}{6}t$	1	$2R$
6	$t^2 - 4t$	$-30p \cos \frac{2p}{3}t$	1	$\frac{4}{3}R$
7	$4(t^2 - t^3)$	$30p \sin \frac{5p}{3}t$	$\frac{1}{2}$	$1.5R$
8	$2t^3 + t^2$	$-60p \cos \frac{4p}{3}t$	$\frac{1}{2}$	$2R$
9	$4t - 2t^3$	$-20p \cos \frac{4p}{3}t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}R$

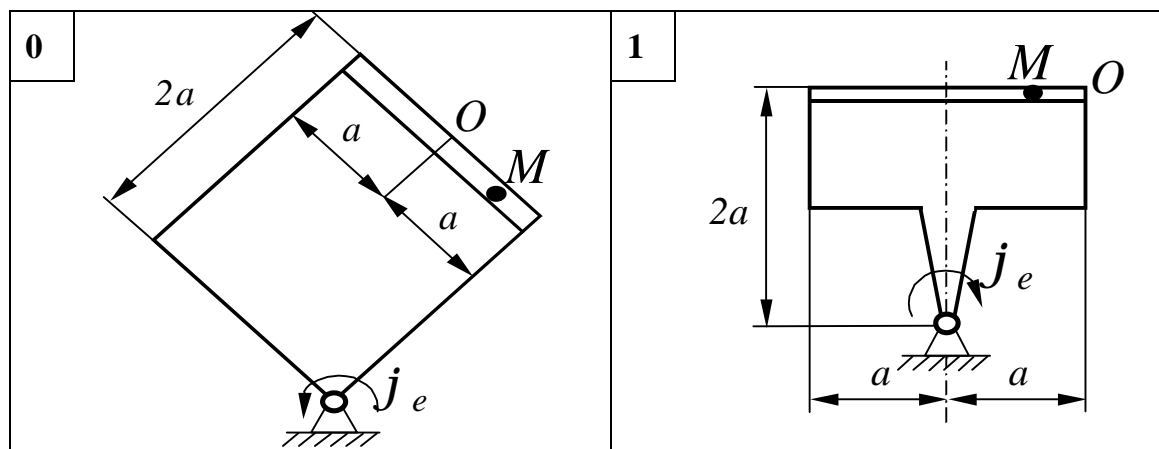


Рисунок 4.79

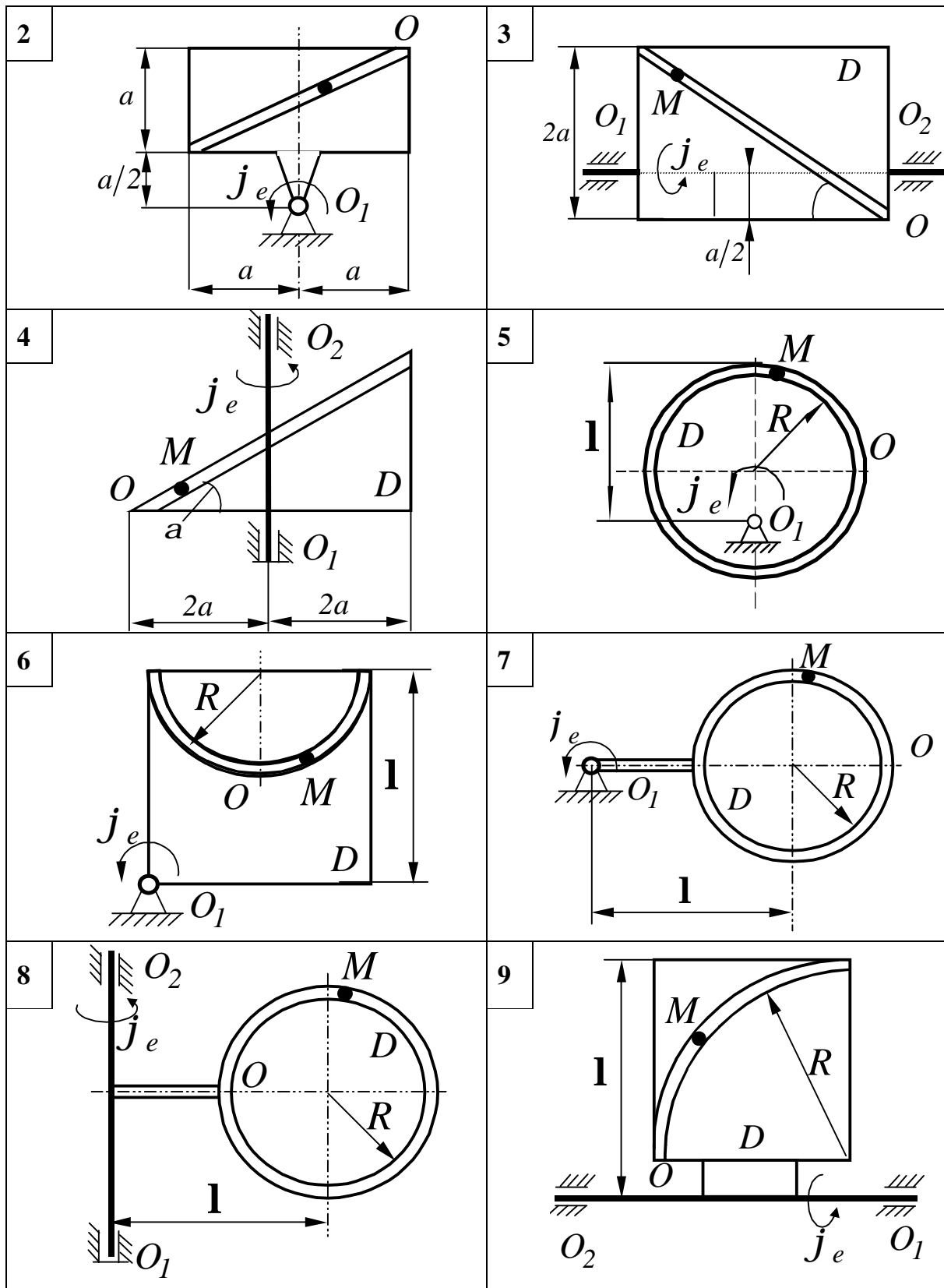


Рисунок 4.79, аркуш 2

ВКАЗІВКА 2. Перш ніж робити розрахунки, необхідно за умовами задачі визначити, де знаходиться точка M на пластині в момент часу $t_1 = 1\text{ с.}$, і зобразити точку саме в цьому положенні.

У випадках, що відносяться до схем 5...9, при розв'язку задачі не підставляти числового значення R , доки не будуть визначене положення точки M в момент часу $t_1 = 1\text{ с.}$ і кут між радіусами CM і CA в цей момент.

4.2.4.3 Приклади розв'язання задачі К4

Приклад 1

Кругла пластина радіуса R обертається навколо точки O в своїй площині за законом $j_e = f_1(t)$. По ободу пластини рухається точка M за законом $s = \frac{R}{6} R(t^3 - 2t)$.

Дано: $j = 2(t^2 - t)$, $R=60\text{ см.}$

Знайти: абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки для моменту часу $t_1=1\text{ с.}$

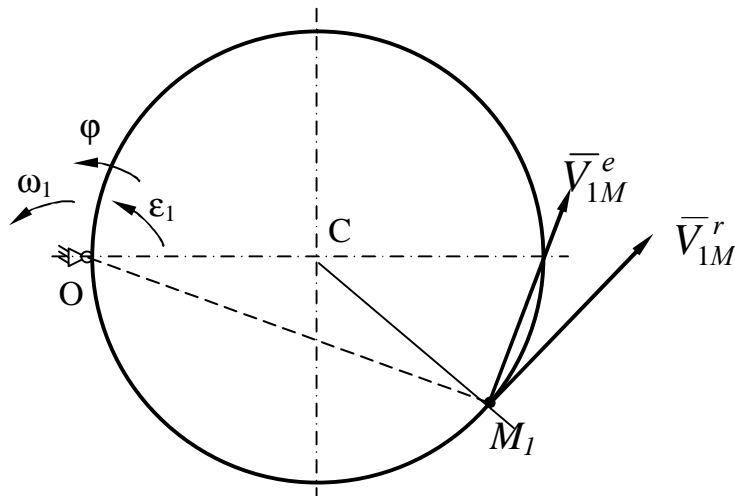


Рисунок 4.80

Розв'язання

Розглянемо рух точки M як складний, вважаючи її рух по дузі кола відносним, а обертання пластини – переносним рухом.

Тоді абсолютна швидкість \bar{V}_M і абсолютне прискорення \bar{a}_M точки знайдуться за формулами:

$$\begin{aligned}\bar{V}_M &= \bar{V}_M^r + \bar{V}_M^e \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_M^r + \bar{a}_M^e + \bar{a}_M^k,\end{aligned}\quad (1)$$

де, в свою чергу,

$$\bar{a}_M^r = \bar{a}_M^{rt} + \bar{a}_M^{rn}; \quad \bar{a}_M^e = \bar{a}_M^{en} + \bar{a}_M^{et}.$$

Визначимо всі величини, що входять до рівності (1).

1 Відносний рух. Цей рух відбувається за законом

$$S_r = AM = \frac{p}{6} R(t^3 - 2t)$$

Визначимо, де знаходиться точка M на дузі кола в момент часу t_1 .

$$S_r = \frac{p}{6} R(1 - 2) = -\frac{p}{6} R.$$

Тоді $\angle ACM = \frac{S_{1r}}{R} = -\frac{p}{6}$ (рад) знак мінус свідчить про те, що

точка M в момент $t_1 = 1$ с знаходиться нижче точки A . Зображуємо на рисунку 4.81 положення точки M у заданий момент часу.

$$V_M^r = \dot{S}_r = \frac{p}{6} R(3t^2 - 2) \text{ см/с.}$$

$$\text{При } t_1 = 1\text{с} \quad V_M^r = \frac{p}{6} R(3 - 2) = \frac{3,14 \cdot 60}{6} = 31,4 \text{ (см/с).}$$

Вектор \bar{V}_{IM}^r спрямований за дотичною до кола (перпендикулярно CM_1) убік додатного відліку.

$$a_M^{rt} = \frac{p}{6} R 6t; \quad a_M^{rn} = \frac{(V_M^r)^2}{r}; \quad r = R.$$

Знаходимо числові значення a_M^{rt} і a_M^{rn} .

$$a_M^{rt} = \frac{3,14 \cdot 60 \cdot 6}{6} = 188,4 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

$$a_M^{rn} = \frac{3,14^2}{60} = 16,4 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор \bar{a}_M^{rt} співпадає з вектором \bar{V}_M^r , а вектор \bar{a}_M^{rn} спрямований до центра т.С. (рис.4.81).

Переносний рух. Цей рух (обертання) відбувається за законом

$$j = 2(t^2 - t).$$

Знайдемо спочатку кутову швидкість і кутове прискорення переносного обертання.

$$\begin{aligned} w &= j = 2(2t - 1), \\ e &= j = 4, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{при } t_1=1\text{с, } w_1 = 2(2 \cdot 1 - 1) = 2 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

$$\text{і } e_1 = \text{const} = 4 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Для визначення \bar{V}_M^e і \bar{a}_M^e знаходимо спочатку відстань $h_1 = OM_1$ точки M_1 від осі обертання O . З рисунка видно, що

$$h_1 = 2R \cos 15^\circ = 115,9 \text{ см.}$$

Тоді в момент часу $t_1=1\text{с}$

$$V_{1M}^e = w_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 115,9 = 231,8 \text{ (см/с)};$$

$$a_{1M}^{en} = w_1^2 \cdot h_1 = 2^2 \cdot 115,9 = 463,6 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

(5)

$$a_{1M}^{et} = e_1 \cdot h_1 = 4 \cdot 115,9 = 463,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор \bar{a}_{1M}^{en} спрямований до осі обертання диска – точки O .

Вектор \bar{a}_{1M}^{et} спрямований перпендикулярно OM_1 убік кутового прискорення e_I .

Зображуємо вектори \bar{V}_{1M}^e , \bar{a}_{1M}^{en} , \bar{a}_{1M}^{et} на рисунках 4.80 і 4.81.

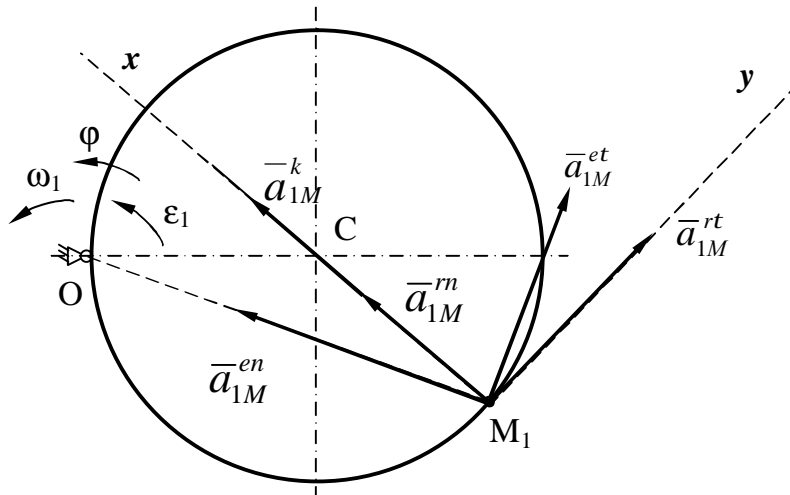


Рисунок 4.81

Прискорення Кориоліса. Модуль кориолісового прискорення визначаємо за формулою $a_M^k = 2\omega_1 \cdot V_{1M}^r \sin \alpha$, де α – кут між вектором відносної швидкості \bar{V}_{1M}^r і віссю обертання (вектором \bar{W}). У нашому випадку цей кут $\alpha = 90^\circ$.

Чисельно в момент часу $t_1=1$ с.

$$a_{1M}^k = 2 \cdot 2 \cdot 31,4 = 125,6 \text{ (см/с}^2\text{)}. \quad (6)$$

Напрямок \bar{a}_{1M}^{-k} знайдемо за правилом Жуковського.

Вектор \bar{V}_{1M}^r повертаємо в площині рисунка на 90° убік обертання диска (вліво). Таким чином, значення всіх векторів, що входять до правих

частин рівностей (1), знайдені, і для визначення \bar{V}_M і \bar{a}_M залишається тільки скласти ці вектори. Виконаємо це додавання аналітично.

Визначення \bar{V}_M .

Врахувавши, що в даному випадку кут між \bar{V}_{1M}^r і \bar{V}_{1M}^e – 165° , значення

Визначення \bar{a}_M . За теоремою про додавання прискорень

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^{rt} + \bar{a}_M^{rn} + \bar{a}_M^{et} + \bar{a}_M^{en} + \bar{a}_M^k. \quad (7)$$

Для визначення \bar{a}_M споектуємо обидві частини рівності (7) на проведені осі M_{1x} і M_{1y} :

$$\begin{aligned} a_{M_{1x}} &= a_{1M}^{rn} + a_{1M}^{en} \cdot \cos 15^\circ + a_{1M}^{et} \cdot \cos 75^\circ + a_{1M}^k = \\ &= 16,4 + 463,6 \cdot 0,966 + 463,6 \cdot 0,259 = 709,8 \text{ см/с}^2, \end{aligned}$$

$$a_{M_{1x}} = 709,8 \text{ см/с}^2;$$

$$\begin{aligned} a_{M_{1y}} &= a_{1M}^{rn} + a_{1M}^{et} \cdot \cos 15^\circ - a_{1M}^{en} \cdot \sin 15^\circ = \\ &= 188,4 + 463,6 \cdot 0,966 - 463,6 \cdot 0,259 = 516,2 \text{ (см/с}^2\text{)}, \end{aligned}$$

$$a_{M_{1y}} = 516,2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{M1} = \sqrt{a_{M_{1x}}^2 + a_{M_{1y}}^2} = \sqrt{709,8^2 + 516,2^2} = 877,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $V_{1M} = 262,3 \text{ см/с}$, $a_{M1} = 877,6 \text{ см/с}^2$.

Приклад 2

Прямокутна пластина (рис. 4.82) обертається навколо осі OO_1 за законом $j = f_1(t)$ (додатній напрямок обертання вказаний на рисунку 4.82 дуговою стрілкою).

Вздовж прямої BD , яка знаходиться на пластинці, рухається точка M за законом $s = AM = f_2(t)$.

Дано: $j = t^2 - 2t^3$ (рад); $b = 16$ см; $s = 60(t^4 - 3t^2) + 56$ (см).

Знайти: абсолютну швидкість \bar{V}_M і абсолютне прискорення \bar{a}_M точки в момент часу $t_1 = 1$ с.

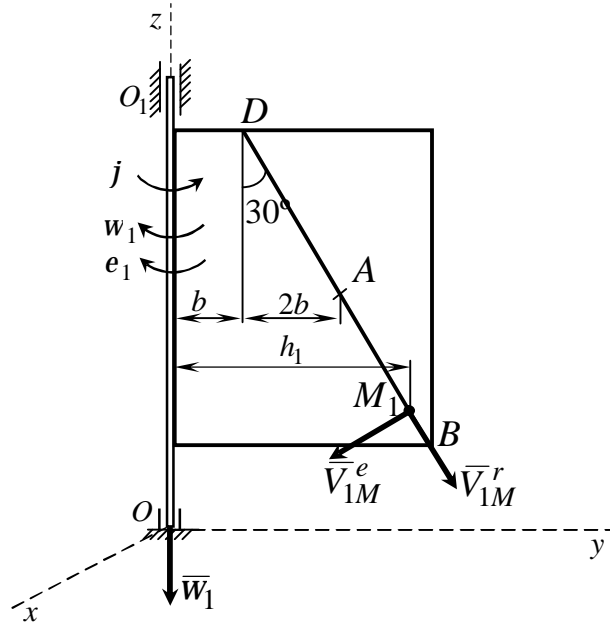


Рисунок 4.82

Розв'язання

Розглянемо рух точки M як складений, вважаючи її рух за прямою BD відносним, а обертання пластини – переносним рухом.

Тоді абсолютна швидкість \bar{V}_M і абсолютне прискорення \bar{a}_M точки знайдуться за формулами:

$$\begin{aligned} \bar{V}_M &= \bar{V}_M^r + \bar{V}_M^e; \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_M^r + \bar{a}_M^e + \bar{a}_M^k, \end{aligned} \quad (1)$$

де, в свою чергу,

$$a_M^r = a_M^{rt} = \& \quad \bar{a}_M^e = \bar{a}_M^{en} + \bar{a}_M^{et}.$$

Визначимо всі величини, що входять до рівності (1).

1 Відносний рух. Цей рух відбувається за законом

$$s_r = AM = 60(t^4 - 3t^2) + 56.$$

Визначимо, де знаходиться точка M на прямій BD у заданий момент часу t_1 .

$$s_{1r} = 60(1 - 3) + 56 = -64 \text{ (см)}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що точка M у момент $t_1 = 1\text{с}$ знаходиться знизу від точки A на відстані $AM_1 = 64\text{см}$. Визначимо відносну швидкість точки $V_M^r = \mathbf{v} = 60(4t^3 - 6t) \text{ см/с}$.

$$\text{При } t_1 = 1\text{с} \quad V_{1M}^r = 60(4 \cdot 1 - 6) = -120 \text{ (см/с)}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що вектор відносної швидкості \bar{V}_M^r напрямлений у від'ємних напрямках рухів, тобто вздовж прямої BD до точки B .

Відносне прискорення точки

$$a_M^r = \mathbf{a} = \mathbf{v}' = 60(12t^2 - 6) \text{ см/с}^2.$$

$$\text{При } t_1 = 1\text{с} \quad a_{1M}^r = 60(12 - 6) = 360 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор \bar{a}_M^r спрямований вздовж прямої BD у додатних напрямках рухів, тобто до точки D .

Переносний рух. Цей рух (обертання пластини) відбувається за законом

$$j = t^2 - 2t^3.$$

Знайдемо спочатку кутову швидкість і кутове прискорення переносного обертання.

$$w = \mathbf{j}' = 2t - 6t^2 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$e = \mathbf{j}'' = 2 - 12t \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

$$\begin{aligned} \text{При } t_1=1c, \quad w_1 &= 2 - 6 = -4 \text{ (} c^{-1}\text{)}, \\ e_1 &= 2 - 12 = -10 \text{ (} c^{-2}\text{)}. \end{aligned}$$

Від'ємні знаки w_1 і e_1 вказують на те, що кутова швидкість і кутове прискорення у заданий момент часу напрямлені в бік, протилежний напрямку \dot{j} (див. рис.4.82).

Для визначення \bar{V}_M^e і \bar{a}_M^e знаходимо спочатку відстань h_1 точки M_1 від осі обертання OO_1 . З рисунка 4.82 видно, що

$$h_1 = (b + 2b + AM_1 \cdot \sin 30^\circ) = (16 + 2 \cdot 16 + 64 \cdot 0,5) = 80 \text{ (} cm\text{)}.$$

Тоді в момент часу $t_1=1c$

$$\begin{aligned} V_{1M}^e &= w_1 \cdot h_1 = 4 \cdot 80 = 320 \text{ (} cm/c\text{)}, \\ a_{1M}^{en} &= w_1^2 \cdot h_1 = 4^2 \cdot 80 = 1280 \text{ (} cm/c^2\text{)}, \\ a_{1M}^{et} &= e_1 \cdot h_1 = 10 \cdot 80 = 800 \text{ (} cm/c^2\text{)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Вектор \bar{a}_{1M}^{en} спрямований перпендикулярно до осі обертання пластини OO_1 .

Вектор \bar{a}_{1M}^{et} спрямований перпендикулярно площині пластини убік кутового прискорення e_1 .

На рисунку 4.83 цей вектор відображено в аксонометрії, паралельно до осі Ox .

Прискорення Кориоліса. Модуль коріолісового прискорення визначаємо за формулою

$$a_M^k = 2\omega_1 \cdot V_{1M}^r \sin \alpha,$$

де α – кут між вектором відносної швидкості \bar{V}_{1M}^r і вектором \bar{w}_1 .
У нашому випадку цей кут $\alpha = 30^\circ$.

Чисельно в момент часу $t_1=1c$ $a_{1M}^k = 2 \cdot 4 \cdot 120 \cdot \sin 30^\circ = 480$ (см/с²).

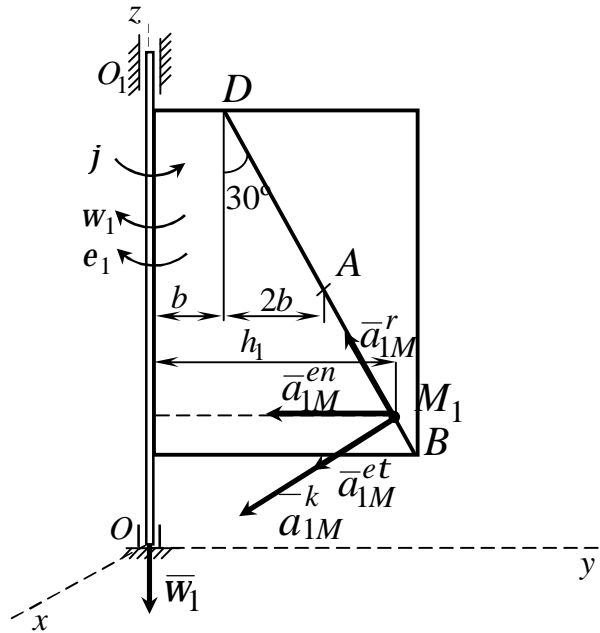


Рисунок 4.83

Напрямок \bar{a}_{1M}^{-k} знайдемо за правилом Жуковського. Для цього вектор відносної швидкості \bar{V}_{1M}^r спроекціюємо на площину, перпендикулярну вектору \bar{w}_1 , і повернемо цю проекцію в напрямку обертання пластини на кут 90° . Таким чином, значення всіх векторів, що входять до правих частин рівностей (1), знайдені, відомі й напрямки векторів. Виконаємо додавання складових векторів \bar{V}_M і \bar{a}_M аналітично.

Визначення \bar{V}_M . Оскільки кут між векторами відносної і переносної швидкостей точки прямий, то $\bar{V}_{1M}^r \perp \bar{V}_{1M}^e$:

$$V_{1M} = \sqrt{(V_{1M}^r)^2 + (V_{1M}^e)^2} = \sqrt{(120)^2 + (320)^2} = 341,8 \text{ (см/с)}.$$

Визначення \bar{a}_M . За теоремою про додавання прискорень

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^{rt} + \bar{a}_M^{rn} + \bar{a}_M^{et} + \bar{a}_M^{en} + \bar{a}_M^k. \quad (7)$$

Для визначення \bar{a}_M спроекцюємо обидві частини рівності (7) на проведені осі $Oxyz$.

$$a_{M1x} = a_{1M}^{et} + a_{1M}^k = 800 + 480 = 1280 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{M1y} = -a_{M1}^{en} - a_{M1}^{rt} \cdot \sin 30^\circ = -1280 - 360 \cdot 0,5 = -1460 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{M1z} = a_{M1}^{rt} \cdot \cos 30^\circ = 360 \cdot 0,866 = 311,8 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$\begin{aligned} a_{M1} &= \sqrt{a_{M1x}^2 + a_{M1y}^2 + a_{M1z}^2} = \sqrt{1280^2 + (-1460)^2 + 311,8^2} = \\ &= 1966,5 \text{ (см/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V_{1M} = 341,8 \text{ см/с};$
 $a_{1M} = 1966,5 \text{ см/с}^2.$

5 ЗАЛІКОВІ ЗАПИТАННЯ

1 Статика твердого тіла

1.1 Умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил (математичний запис, формулювання).

1.2 Умови рівноваги системи збіжних сил (математичний запис, формулювання).

1.3 Алгебраїчний момент сили відносно точки (рисунок, математичний запис, формулювання).

1.4 Векторний момент сили відносно точки (рисунок, математичний запис, формулювання).

1.5 Момент сили відносно осі (рисунок, математичний запис, формулювання).

1.6 Пара сил. Алгебраїчний і векторний момент пари сил (рисунок, математичний запис, формулювання).

1.7 Теорема про еквівалентність двох пар сил, розташованих в одній площині (формулювання).

1.8 Теорема про паралельне перенесення пари сил (рисунок, формулювання).

1.9 Статично визначені та статично невизначені задачі (визначення).

1.10 Умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил у векторній і аналітичній формах (математичний запис, формулювання).

2 Кінематика

2.1 Визначення швидкості точки при натуральному способі задання їм руху (математичний запис, формулювання).

2.2 Визначення швидкості точки при координатному способі задання їм руху (математичний запис, формулювання).

2.3 Визначення швидкості точки при векторному способі задання їм руху (математичний запис, формулювання).

2.4 Визначення прискорення точки при натуральному способі задання їм руху. Нормальне і дотичне прискорення (рисунок, математичний запис, формулювання).

2.5 Визначення прискорення точки при координатному способі задання їм руху (математичний запис, формулювання).

2.6 Визначення прискорення точки при векторному способі задання їм руху (рисунок, математичний запис, формулювання).

2.7 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі (рисунок, визначення).

2.8 Кутова швидкість і кутове прискорення тіла при обертальному русі (позначення, математичний запис, формулювання).

2.9 Швидкість точки тіла при його обертальному русі (математичний запис, рисунок, визначення).

2.10 Прискорення точки тіла при його обертальному русі (математичний запис, рисунок, визначення).

2.11 Вектори кутової швидкості та кутового прискорення при обертальному русі тіла навколо нерухомої осі (рисунок, визначення).

2.12 Векторний вираз для швидкості та прискорення точки тіла при його обертальному русі (рисунок, математичний запис, визначення).

2.13 Плоский рух твердого тіла (визначення, кінематичні рівняння руху).

2.14 Миттєвий центр швидкостей (визначення).

2.15 Швидкості точок тіла при плоскому русі (визначення, математичний запис, рисунок).

2.16 Прискорення точок тіла при плоскому русі (визначення, математичний запис, рисунок).

2.17 Складний рух точки. Абсолютний, відносний і переносний рухи точки (визначення, означення).

2.18 Складний рух точки. Теорема про додавання швидкостей (правило паралелограма швидкостей) (визначення, математичний запис, рисунок).

2.19 Складний рух точки. Абсолютне прискорення точки, теорема Коріоліса (визначення, математичний запис).

2.20 Визначення напрямку прискорення Коріоліса за методом Жуковського (визначення, рисунок).

2.21 Складний рух точки. Окремі випадки руху (визначення, математичний запис).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Никитин, Н.Н. Курс теоретичної механіки: учеб. пособие для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов/ Н.Н.Никитин. –5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.: – ил.– ISBN 5-06-000695-6.

2 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб.для ВТУЗов./ С.М.Тарг.–12-е изд., стер. – М. :Высш. шк., 2002. – 416 с.: ил.– ISBN 5-06-00-35-13-9

3 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2т. / М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон.: – М.: Наука. – 1972. – Т. 2. – 640 с.

4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для технических ВУЗов. – 7-е изд., исп. – М.: Интеграл-пресс, 2002. – 384 с. – ISBN 5-89602-016-3

5 Подлесний, С.В. Розв'язання задач з теоретичної механіки. Статика/ С.В.Подлесний та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 200 с. – ISBN 5-7763-13-02-3

6 Подлесний, С.В. Розв'язання задач з теоретичної механіки. Кінематика/ С.В.Подлесний та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 200 с. – ISBN 966-379-096-2

7 Водолазська, О.Г. Збірник завдань для самостійної роботи та контролю знань студентів з теоретичної механіки. Кінематика і статика/ О.Г.Водолазська та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2004 –Ч.1.– 128с. – ISBN 966-7851-29-X

Навчальне видання

**ЄРФОРТ Юрій Олександрович
ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

СТАТИКА І КІНЕМАТИКА

Навчальний посібник
з методичними вказівками і контрольними завданнями для студентів
заочної форми навчання

Редактор І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

Вн./2006. Підп. до друку 01.04.08. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 9,53. Обл.-вид. арк. 7,73.
Тираж 300 прим. Зам. № 64.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003.